

## Okresowość

Dla funkcji trygonometrycznych  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest dowolnym kątem, a  $k$  dowolną liczbą całkowitą, zachodzi:

$$\sin(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(k \cdot 180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

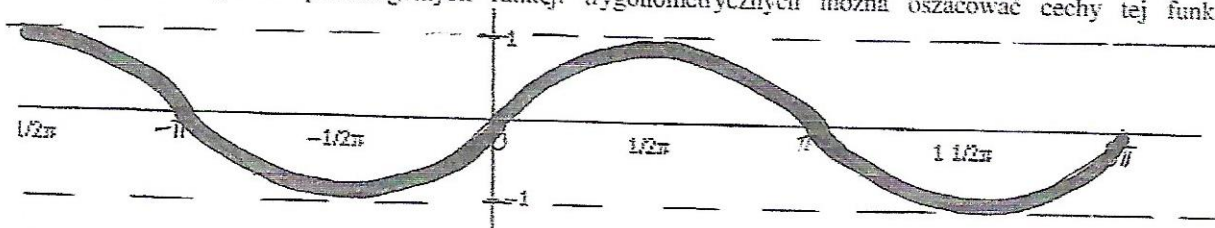
$$\operatorname{ctg}(k \cdot 180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

okresem funkcji  $\sin$  i  $\cos$  jest  $360^\circ = 2\pi$ ,  
 $T = 2\pi$ ,  
 okresem funkcji  $\operatorname{tg}$  i  $\operatorname{ctg}$  jest  $180^\circ = \pi$ ,  
 $T = \pi$

## Wykresy funkcji trygonometrycznych

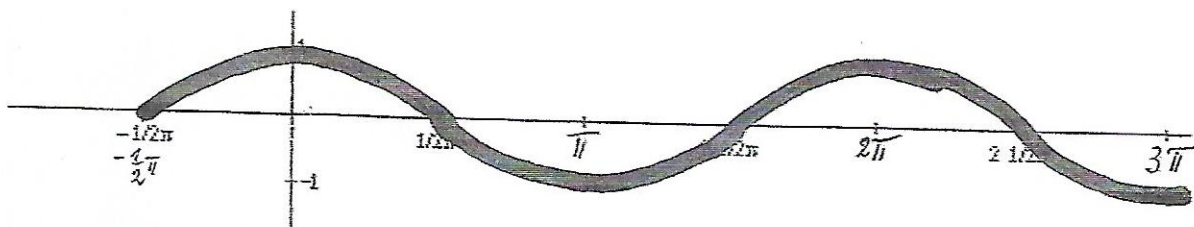
Wykres funkcji sinus nazywa się sinusoidą, funkcji cosinus cosinusoidą, funkcji tangens tangensoidą, a funkcji cotangens cotangensoidą.

Na podstawie wykresu poszczególnych funkcji trygonometrycznych można oszacować cechy tej funkcji:



Sinusoida – własności funkcji  $y = \sin x$ :

- $D_f = \mathbb{R}$
- $ZW_f = [-1; 1]$
- $T = 2\pi$
- $f(x) = 0$  dla  $x = k\pi$  gdzie  $k \in \mathbb{Z}$
- nieparzystość
- okresowość



Cosinusoida – własności funkcji  $y = \cos x$ :

- $D_f = \mathbb{R}$
- $ZW_f = [-1; 1]$
- $T = 2\pi$
- $f(x) = 0$  dla  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  gdzie  $k \in \mathbb{Z}$
- parzystość
- okresowość

Wykres funkcji  $y = \cos x$  powstaje z wykresu funkcji  $y = \sin x$  przez przesunięcie sinusoidy na osi x w lewo o kąt  $\frac{\pi}{2}$ .

## Parzystość i nieparzystość

Funkcja  $\cos \alpha$  jest parzysta, czyli zachodzi:

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

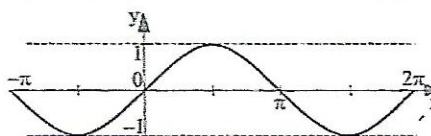
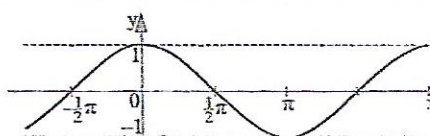
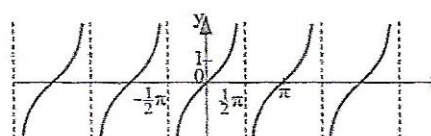
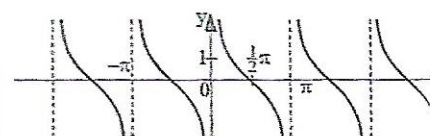
Natomiast funkcje  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  i  $\operatorname{ctg} \alpha$  są nieparzyste, czyli:

$$-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$$

$$-\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$$

$$-\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(-\alpha)$$

## WYKRESY FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

 <p style="text-align: center;">sinusoida</p>	 <p style="text-align: center;">cosinusoida</p>
<p><math>y = \sin x</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- dziedzina: <math>x \in \mathbb{R}</math></li> <li>- zbiór wartości: <math>y \in (-1, 1)</math></li> <li>- okres zasadniczy: <math>T = 2\pi</math></li> <li>- miejsca zerowe: <math>x = k\pi, k \in \mathbb{C}</math></li> <li>- funkcja nieparzysta</li> <li>- funkcja rośnie w przedziałach <math>(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)</math>, natomiast maleje w przedziałach <math>(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{C}</math></li> </ul>	<p><math>y = \cos x</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- dziedzina: <math>x \in \mathbb{R}</math></li> <li>- zbiór wartości: <math>y \in (-1, 1)</math></li> <li>- okres zasadniczy: <math>T = 2\pi</math></li> <li>- miejsca zerowe: <math>x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}</math></li> <li>- funkcja parzysta</li> <li>- funkcja rośnie w przedziałach <math>(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)</math>, natomiast maleje w przedziałach <math>(2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{C}</math></li> </ul>
 <p style="text-align: center;">tangensoida</p>	 <p style="text-align: center;">cotangensoida</p>
<p><math>y = \operatorname{tg} x</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- dziedzina: <math>x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}\}</math></li> <li>- zbiór wartości: <math>y \in \mathbb{R}</math></li> <li>- okres zasadniczy: <math>T = \pi</math></li> <li>- miejsca zerowe: <math>x = k\pi, k \in \mathbb{C}</math></li> <li>- funkcja nieparzysta</li> <li>- funkcja rośnie przedziałami w <math>(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{C}</math></li> </ul>	<p><math>y = \operatorname{ctg} x</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- dziedzina: <math>x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{C}\}</math></li> <li>- zbiór wartości: <math>y \in \mathbb{R}</math></li> <li>- okres zasadniczy: <math>T = \pi</math></li> <li>- miejsca zerowe: <math>x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}</math></li> <li>- funkcja nieparzysta</li> <li>- funkcja maleje przedziałami w <math>(k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{C}</math></li> </ul>

### PODSTAWOWE TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

1)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  dla  $x \in \mathbb{R}$  Jest to tzw. „jedynka trygonometryczna”.

2)  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C} \right\}$

3)  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{ x : x = k\pi, k \in \mathbb{C} \}$

4)  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$  dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{C} \right\}$

### WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH WYBRANYCH KĄTÓW

		Kąty I ćwiartki					Kąty II ćwiartki			
Kąt	rad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}$		-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

		Kąty III ćwiartki					Kąty IV ćwiartki			
Kąt	rad	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
		0	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	$2\pi$
$\sin$		0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos$		-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}$		-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-