MATEMATYKA KL.I LO

LEKCJA data 07.05.2020r.

Temat: Dziedzina funkcji. Zbiór wartości funkcji.

Dla każdej funkcji możemy podać jej własności. Są nimi:

- dziedzina funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- miejsca zerowe funkcji,
- zbiór tych argumentów, dla których funkcja jest dodatnia,
- zbiór tych argumentów, dla których funkcja jest ujemna,
- monotoniczność funkcji,
-najmniejsza i największa wartość funkcji,
- różnowartościowość,
- parzystość,
- okresowość.

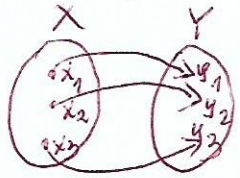
/Stopniowo będziemy omawiać poszczególne własności funkcji na kolejnych lekcjach. Dzisiaj zajmiemy się dziedziną funkcji: co to jest dziedzina funkcji i jak się ją wyznacza w zależności od sposobu opisania funkcji/.

DEFINICJA :

Dziedziną funkcji nazywamy zbiór wszystkich argumentów x dla których funkcja jest określona.

Dziedzinę funkcji f najczęściej oznaczamy przez D_f.

Jeżeli funkcja określona jest grafem, to dziedziną funkcji jest zbiór X, czyli zbiór argumentów x:



$X = \{x_1, x_2, x_3\}$

X→ Y lub f(x) =y

Zbiór X – dziedzina funkcji

Elementy zbioru X, czyli:x_1,x_2,x_3 – **argumenty funkcji**

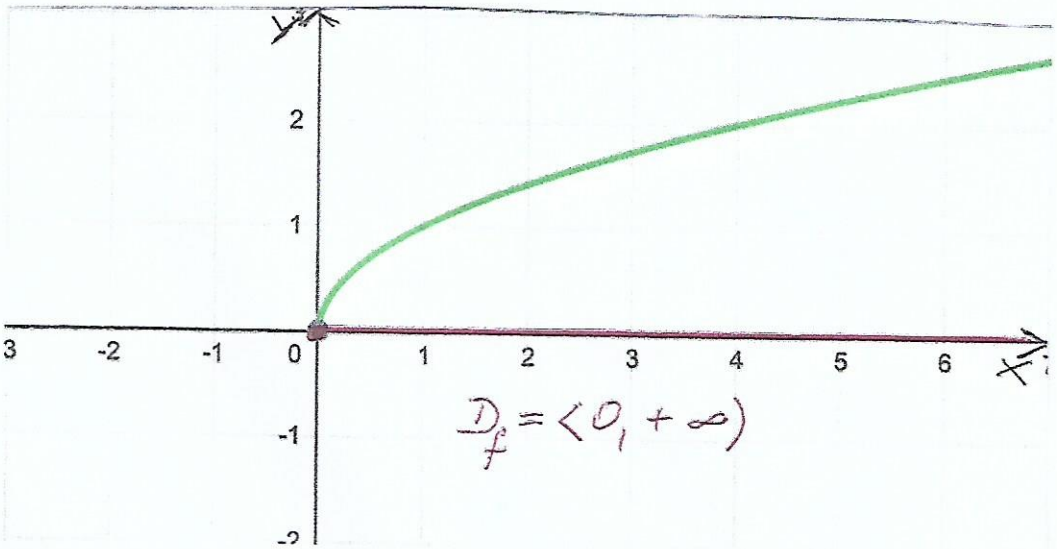
Zbiór Y- zbiór wartości funkcji

Elementy zbioru Y, czyli: y_1, y_2, y_3 – wartości funkcji

- Jeżeli funkcja opisana jest tabelką, to dziedziną funkcji jest górny wiersz tabeli: X $=D_f=\{-2,-1,0,5\}$

x	-2	-1	0	5
Y= - 2x	4	2	0	-10

- Jeżeli funkcja opisana jest wykresem, to dziedzinę funkcji odczytujemy z osi 0X /poprzez rzut prostokątny wykresu funkcji na oś 0X/:



- Jeżeli funkcja opisana jest wzorem, to dziedzina tej funkcji zależy od wzoru funkcji.

Wyznaczanie dziedziny funkcji opisanej wzorem:

Wyznaczanie dziedziny funkcji

Podczas wyznaczania dziedziny funkcji musimy pamiętać, że:

- dzielenie przez zero jest niewykonalne, w przypadku ułamka mianownik musi być różny od 0,
- liczba podpierwiastkowa nie może być ujemna
- liczba podpierwiastkowa w mianowniku pewnego ułamka musi być liczbą dodatnią

Kiedy wyznaczamy dziedzinę pewnej funkcji, staramy się patrzeć prościej na to, co widzimy. Czyli kiedy zobaczymy taki prosty wzór:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

Nasz tok rozumowania będzie wyglądał tak:

1. Jest to po prostu ułamek $\frac{a}{b}$, dlatego mianownik (czyli b) ma być różny od zera
2. Zauważamy, że $a = x^2$. Zastanawiamy się, czy jest tu jakiś *ułamek* lub *pierwiastek*, lecz na szczęście nie ma. Zatem w tym przypadku $x \in \mathbb{R}$
3. Patrzymy na mianownik. Mamy $b = x + 2$. Niestety, ponieważ jest to mianownik (pamiętamy **„nigdy cholero nie dziel przez zero!”**), musimy założyć, że $b \neq 0$, czyli $x + 2 \neq 0 \implies x \neq -2$.
4. Na koniec podsumowujemy wszystko. Czyli odrzucamy wszystkie x, które zostały odrzucone w którymś punkcie. Czyli otrzymujemy $x \neq -2$, zatem dziedziną będzie $D_f = R\backslash\{-2\}$.

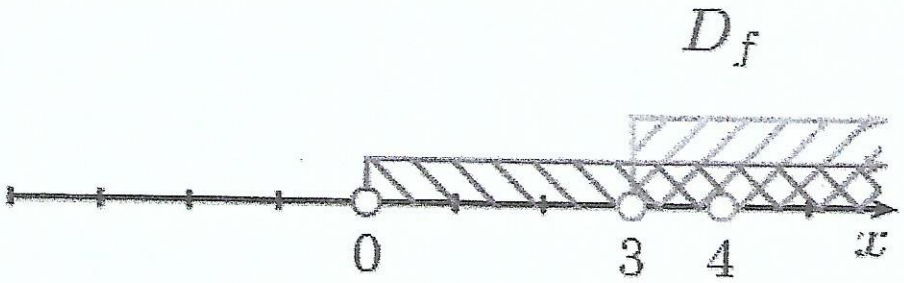
Spójrzmy teraz na bardziej skomplikowany

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-3}^2}{\sqrt{x}(x-4)(x-3)}$$

I znowu banał...

1. Mamy ułamek $\frac{a}{b}$, gdzie a może być dowolne, a b różne od zera
2. Patrzymy na licznik a. I znowu mamy $a = c^2$. Ponieważ kwadraty nas nie interesują, nie wpływają na dziedzinę funkcji patrzymy na c:
   - No i mamy $c = \sqrt{x-3}$. Wiemy, że liczba podpierwiastkowa (w tym przypadku $x-3$) musi być nieujemna, więc rozwiązujemy nierówność x $x - 3 \geq 0$ i po prostym przekształceniu otrzymujemy $x \geq 3$
3. Teraz patrzymy na mianownik $b = d \cdot e \cdot f$, który ma być różny od 0. Wykorzystujemy własność mówiącą, że iloczyn pewnych liczb wynosi zero, gdy któraś z tych liczb jest równa 0. Czyli w skrócie $d \cdot e \cdot f = 0 \iff d = 0 \vee e = 0 \vee f = 0$. I rozwiązujemy, wykluczając te liczby:
   - $d = 0 \implies \sqrt{x} = 0 \implies x = 0$
   - $e = 0 \implies x - 3 = 0 \implies x = 3$
   - $f = 0 \implies x - 4 = 0 \implies x = 4$

   Zatem $x \neq 0$, $x \neq 3$, $x \neq 4$. Ponadto, aby wyrażenie $\sqrt{x}$ miało sens, x nie może być liczbą ujemną, zatem $x > 0$.
4. I podsumowujemy: $x \geq 3, x \geq 0, x \neq 0, x \neq 3, x \neq 4$. Zatem $D_f = (3; +\infty) \backslash \{4\}$.



Przykład 1. Określmy dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$. Wyrażenie $\frac{1}{x}$ ma sens liczbowy jedynie wtedy, gdy $x \neq 0$, ponieważ gdyby x było równe zeru musielibyśmy wykonać dzielenie przez 0, a wszyscy dobrze wiemy, że nie wolno dzielić przez 0 (1:0 nie ma sensu liczbowego). Wobec czego możemy wywnioskować, że $D_f = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Przykład 2. $f(x) = \frac{3x+2}{(x-1)(x-2)}$ Aby określić dziedzinę musimy wyznaczyć te wartości x, dla których mianownik jest równy 0, a następnie wykluczyć te liczby z dziedziny:

$$(x-1)(x-2) = 0$$

z własności iloczynu wiemy, że iloczyn ma wartość zero, jeśli którykolwiek z czynników ma wartości zero. Wobec czego:

$$x - 1 = 0 \text{ lub } x - 2 = 0$$
$$x = 1 \text{ lub } x = 2$$

Czyli $D_f = \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$.

Przykład 3. $f(x) = \frac{2x+2}{\sqrt{x-2}}$ Ponieważ liczba podpierwiastkowa musi być liczbą nieujemną, ponadto mianownik nie może być równy zeru, więc liczba podpierwiastkowa musi być większa od zera. Czyli $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$, a wtedy $D_f = (2; +\infty)$.

Przykład 4. $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ Mianownik musi być różny od zera, wobec czego $x^2 + 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -4$. Ponieważ kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny (czyli zawsze $x^2 \geq 0$), więc x^2 nigdy nie będzie równy liczbie -4. Otrzymujemy $D_f = \mathbb{R}$.

Zbiór wartości funkcji

DEFINICJA

Zbiorem wartości funkcji nazywamy zbiór tych elementów zbioru Y, którym zostały przyporządkowane elementy ze zbioru X. Zbiór wartości funkcji *f* będziemy oznaczać przez ZW_f.

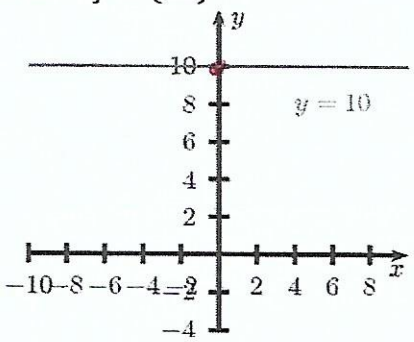
$$ZW_f = \{y: \exists_{x \in D_f}\ y = f(x)\}$$

Zbiór wartości możemy także rozumieć jako zbiór wszystkich liczb (ściślej elementów zbioru *Y*), które zostały wyznaczone przez zrzutowanie jakiejś funkcji np. *f* na oś *Y*.

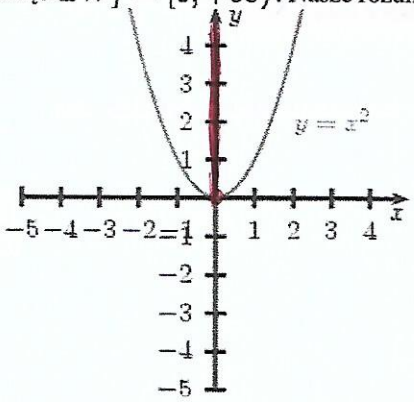
Przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji niejednokrotnie warto wykonać szkic funkcji. To prawie nic nie kosztuje, ale możemy na tym wiele zyskać. Poza tym osoba sprawdzająca rozwiązanie naszego zadania może uznać rysunek jako pewnego rodzaju dowód. Dlatego w większości podawanych przez nas przykładów będziemy rysować wykres funkcji, który w znacznej mierze może nam ułatwić znalezienie zbioru wartości funkcji, a sprawdzającym być może umili życie. Oczywiście nie należy popadać w skrajność, czasami spokojnie można pominąć rysunek, gdy rozwiązanie widać już na pierwszy rzut oka.

Zobaczmy na kilka przykładów:

Przykład 1. Mamy funkcję $f(x) = 10$. Niezależnie, jakibyśmy wybrali *x* i tak *f(x)* będzie równe 10. Dlatego też $ZW_f = \{10\}$.



Przykład 2. Mamy funkcję $f(x) = x^2$. Wiemy, że funkcja ta przyjmuje wartości nieujemne, ponadto dla każdego $y \geq 0$ znajdziemy taki *x*, że $f(x) = y$ np. gdy weźmiemy $x = \sqrt{y}$, wtedy $x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$. Tak więc $ZW_f = [0; +\infty)$. Nasze rozumowanie potwierdza rysunek.



przepisać

przeczytać

przykłady przerysować i przepisać

przepisać

Przykład 3. Wyznaczmy zbiór wartości funkcji $y = 2 - \sqrt{2 - 2x}$.

Pomyślmy... pierwiastek kwadratowy dowolnej liczby nigdy nie będzie ujemny, co najwyżej równy zero. Zatem najmniejsza wartość $\sqrt{a}$ wynosi zero, gdzie $a = 2 - 2x$. Potem już dla większych a pierwiastek także staje się coraz większy np. dla $\sqrt{400} = 20 < \sqrt{10000} = 100$. Zatem $\sqrt{a}$ dojdzie bardzo wysoko, bo aż do $+\infty$, czyli $ZW_{\sqrt{x}} = [0; +\infty)$. Ponadto od liczby 2 odejmujemy ten pierwiastek, zatem wszystko nam pójdzie „do góry nogami" przez znak „-" (czyli otrzymamy $(-\infty; 0]$), a następnie pójdzie o dwa „do góry" otrzymując $(-\infty; 2]$. Zatem $ZW = (-\infty; 2]$.

Jednak nie zawsze dopadnie nas natchnienie, wtedy musimy to zrobić w standardowy sposób:

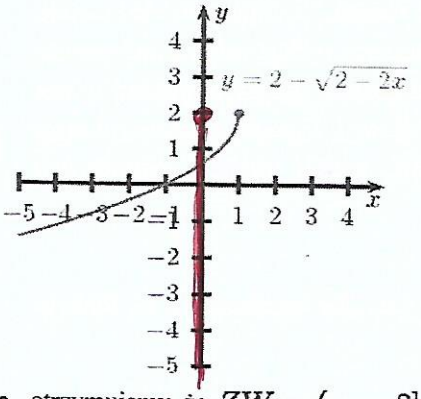
- Wyznaczamy dziedzinę. Liczba podpierwiastkowa musi być nieujemna, zatem otrzymujemy nierówność $2 - 2x \geq 0$. Wykonując kilka przekształceń otrzymujemy $x \leq 1$.
- Rysujemy wykres funkcji uwzględniając dziedzinę. Sporządźmy w tym celu najpierw tabelkę:

x	-2	-1	0	1
y	$2 - \sqrt{6}$	0	$2 - \sqrt{2}$	2

D_f
ZW_f

przepisać

Zatem wykres będzie podobny do tego:



przepisać

- otrzymujemy, że $ZW = (-\infty; 2]$

Sekcja .... data 08.05.2020r.

Temat; **Miejsca zerowe funkcji**

DEFINICJA

Miejscem zerowym funkcji nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji jest równa *0* [czyli $f(x) = 0$].

przepisać

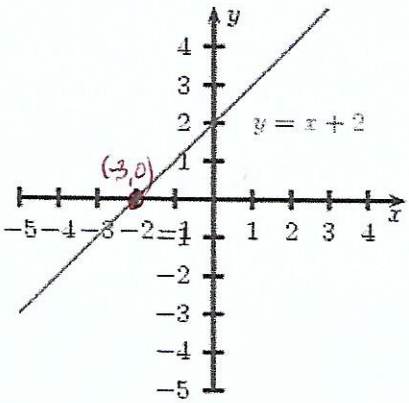
Na wykresie funkcji *f* miejscami zerowymi będą miejsca przecięcia wykresu funkcji z osią OX.

- **Przykład 1**

Funkcja $f(x) = x + 2$ ma jedno miejsce zerowe dla $x = -2$. Możemy to zaobserwować na wykresie albo rozwiązać równanie $f(x) = 0$:

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

przepisać

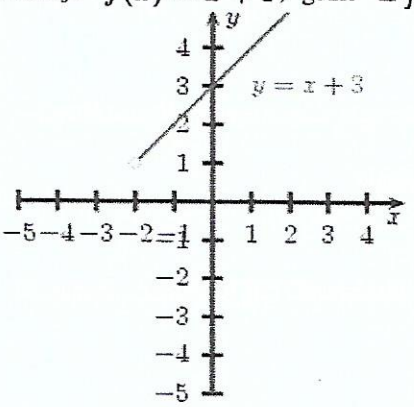


M_{z_f} i $x_0 = -3$

Nie wszystkie funkcje posiadają miejsca zerowe. Pokazuje nam to kolejny przykład.

- **Przykład 2**

Funkcja $f(x) = x + 3$, gdzie $D_f = (-2; +\infty)$ nie posiada miejsc zerowych. Widać to na wykresie:



$M_0 \in \emptyset$

Możemy również sprawdzić to algebraicznie:

$$\begin{cases} x + 3 = 0 \\ x \in (-2; +\infty) \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ x \in (-2; +\infty) \end{cases} \iff x \in \emptyset$$

przykład

- **Przykład 3**

Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji $f(x) = 2(x-2)(x+3)$.

$$f(x) = 0 \iff 2(x-2)(x+3) = 0$$

możemy obustronnie dzielić przez 2 i otrzymujemy

$$(x-2)(x+3) = 0 \iff (x - 2 = 0 \vee x + 3 = 0) \iff (x = 2 \vee x = -3)$$

Zatem $f(x) = 0 \iff x \in \{-3, 2\}$.

- **Przykład 4**

Znajdźmy wszystkie x dla których $f(x) = 0$, a $f(x) = 9 - x^2$. Czyli:

$$f(x) = 0 \iff 9 - x^2 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

Korzystając, ze wzorów skróconego mnożenia $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$ otrzymujemy:

$(x-3)(x+3) = 0$, czyli $x - 3 = 0$ lub $x + 3 = 0$.

Zatem $f(x) = 0$, gdy $x = 3$ lub $x = -3$.

-