2

MATeMAtyka

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska

Zakres podstawowy

Ćwiczenia i zadania
dla szkół ponadgimnazjalnych

nowa era

2

MATeMAtyka

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska

Zakres podstawowy

Ćwiczenia i zadania
dla szkół ponadgimnazjalnych

nowa era Twoje mocne strony

MATeMAtyka

Ćwiczenia i zadania *MATeMAtyka 2* uzupełniają dostosowany do obowiązującej podstawy programowej podręcznik *MATeMAtyka 2* Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej i Grzegorza Janochy dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki na IV etapie edukacyjnym.

Nr ewidencyjny w wykazie: 378/2/2013

nowa era

ISBN 978-83-267-1506-8
Wydanie czwarte
Warszawa 2016

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Elżbieta Zięcina
Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Renata Wolniewicz
Redakcja językowa: Magdalena Iżykowska
Korekta językowa: Anna Wasilewska
Projekt graficzny okładki: Elżbieta Król
Fotografia na okładce: shutterstock.com/file404
Projekt graficzny zeszytu ćwiczeń: Lech Chańko
Rysunki merytoryczne: Lech Chańko
Skład systemem TEX: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.
Al. Jerozolimskie 146D, 02-305 Warszawa
tel.: 22 570 25 80; faks: 22 570 25 81
infolinia: 801 88 10 10 (z telefonów stacjonarnych)
58 721 48 00 (z telefonów komórkowych)
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Druk i oprawa: Techgraf, Łańcut

Spis treści

Zadanie do rozwiązania w zeszycie.

* Zadanie trudniejsze.

Niebieskim paskiem oznaczono zadania wykraczające poza zakres podstawowy.

4. Ciągi

4.1. Pojęcie ciągu

1. Odgadnij regułę, zgodnie z którą powstają kolejne wyrazy ciągu, i uzupełnij brakujące wyrazy.

a) $2,\ 4,\ 6,\ \boxed{},\ \boxed{},\ 12,\ 14,\ \ldots$

b) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \boxed{},\ \frac{1}{5},\ \boxed{},\ \ldots$

c) $1,\ \boxed{},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \boxed{},\ \frac{1}{729},\ \ldots$

d) $1,\ -4,\ 9,\ -16,\ \boxed{},\ \boxed{},\ 49,\ -64,\ldots$

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

2. a) Uzupełnij tabelę z wyrazami ciągu, jeśli są one odwrotnościami kolejnych liczb pierwszych.

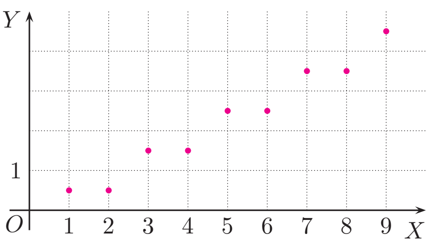
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$				$\frac{1}{17}$

b) Uzupełnij tabelę z wyrazami ciągu, jeśli są one odwrotnościami kwadratów kolejnych liczb nieparzystych.

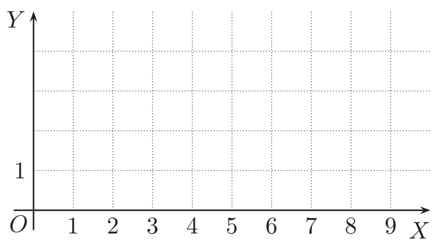
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n						$\frac{1}{121}$	

3. Naszkicuj wykres ciągu o podanych wyrazach.

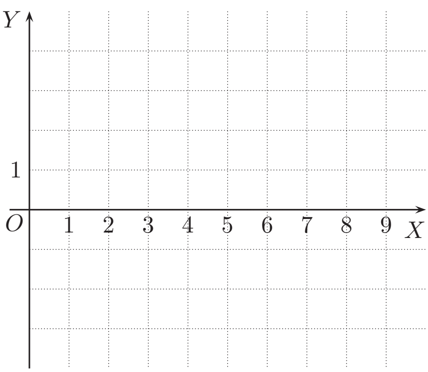
a) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{7}{2},\ \ldots$



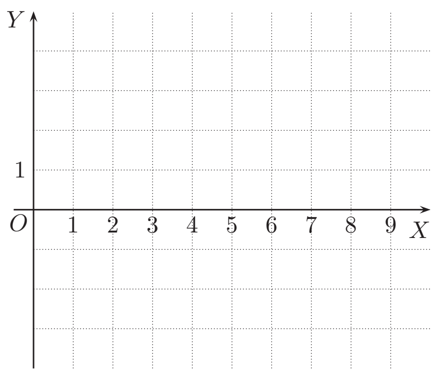
c) $\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 2,\ \frac{7}{2},\ 2,\ \ldots$



b) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ -\frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2},\ \ldots$



d) $-\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{3}{2},\ 2,\ -\frac{5}{2},\ 3,\ -\frac{7}{2},\ 4,\ \ldots$



4. Naszkicuj wykres ciągu o wyrazach:

a) $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots$

b) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

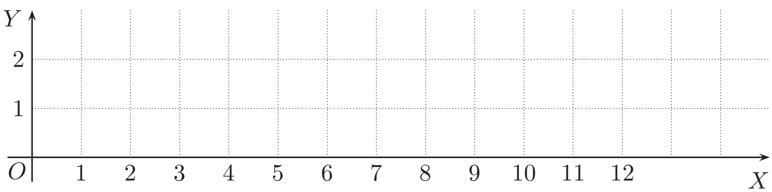
c) $1, -2, 3, 1, -2, 3, 1, -2, 3, \ldots$

d) $2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \ldots$

5. Wpisz w kratki dwanaście początkowych wyrazów ciągu i naszkicuj jego wykres, jeśli:

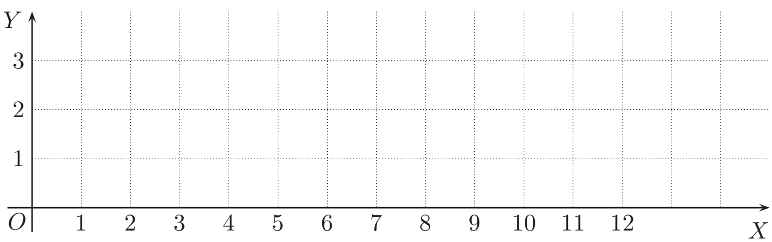
a) n-ty wyraz ciągu równa się reszcie z dzielenia liczby n przez 3,

$\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{0}$



b) n-ty wyraz ciągu równa się reszcie z dzielenia liczby n przez 4.

$\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square$



6. Wpisz w kratki piętnaście początkowych wyrazów ciągu, którego n-ty wyraz równa się reszcie z dzielenia liczby n^2 przez 5.

$\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \boxed{4}, \boxed{1}, \boxed{0}$

7. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu będących kolejnymi przybliżeniami dziesiętnymi podanej liczby.

a) $\sqrt{2}$ 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421

b) $\sqrt{3}$ __________

c) π __________

$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237309504880$
$\sqrt{3} \approx 1{,}73205080756887729352$
$\pi \approx 3{,}14159265358979323846$

4.2. Sposoby określania ciągu

8. Ciąg określony jest wzorem ogólnym $a_n = n^2 + 1$. Uzupełnij tabelę.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	2	5	10				

9. Podaj pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n).

a) $a_n = 3n$ $\quad a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 9,\ a_4 = 12,\ a_5 = 15$

b) $a_n = 3n - 1$

c) $a_n = 4n + 1$

d) $a_n = 2n^2$

e) $a_n = -\frac{1}{6}n^2$

10. Wyznacz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n).

a) $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$ $\quad a_1 = (-1)^1 \cdot 2^1 = -2,\qquad a_2 =$

$a_3 = \qquad a_4 =$

b) $a_n = |n - 2|$

c) $a_n = n^3 - n^2$

d) $a_n = n^2 - 3^n$

11. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n).

a) $a_n = \begin{cases} n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

c) $a_n = \begin{cases} -n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n^3 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

d) $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{n}{2^n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

12. Na klasówce należało obliczyć sześć początkowych wyrazów ciągu:

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot (n^2 - 9).$$

Jeden z uczniów podał poniższe odpowiedzi. Które z nich są błędne? Podaj poprawne wartości.

$a_1 = 8$
$a_2 = 5$
$a_3 = 0$
$a_4 = 7$
$a_5 = 16$
$a_6 = -25$

13. Wypisz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) i podaj jego wzór ogólny, jeśli jest to ciąg kolejnych liczb parzystych:

a) o pierwszym wyrazie równym 6, 6, 8, 10, 12, 14, $a_n = 2n + 4$

b) o pierwszym wyrazie równym 0,

c) większych od 11,

d) większych od 10π.

14. Zaproponuj wzór na n-ty wyraz ciągu (wzór ogólny ciągu) o podanych wyrazach.

a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ $a_n = \frac{1}{n^2}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

d) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots$

e) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

f) $-1, 3, -5, 7, -9, \ldots$

15. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

a) $a_n = (n-3)(n+2)$
$(n-3)(n+2) = 0$
$n = 3$ lub $\underset{\text{sprzeczne}}{n = -2}$
zatem $a_3 = 0$

b) $a_n = (n-3)(n-2)$

c) $a_n = (n+3)(n+2)$

d) $a_n = (2n-1)(n-2)$

16. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

a) $a_n = n^2 - 6n + 5$

b) $a_n = n^2(n^2 - 16)$

c) $a_n = (n^2 - 3)(n^2 - 4)$

d) $a_n = \frac{n^2-3n+2}{n+1}$

e) $a_n = \frac{n^2-9n+14}{n^2+4}$

17. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe jeden?

a) $a_n = \frac{n^2-3n+6}{n+2}$

b) $a_n = \frac{n^2-6n+15}{n+3}$

18. Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od liczby m?

a) $a_n = 10 - n^2, \quad m = 0$

b) $a_n = n^2 - 9, \quad m = 6$

c) $a_n = -n^2 + 3n, \quad m = -4$

d) $a_n = n^2 - 3n, \quad m = 10$

4.3. Ciągi monotoniczne

Ciąg (a_n) jest rosnący, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n > 0$).

19. Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący.

a) $a_n = n^2 - 9$

$a_{n+1} = (n+1)^2 - 9 = n^2 + 2n + 1 - 9 = n^2 + 2n - 8$

$a_{n+1} - a_n = (n^2 + 2n - 8) - (n^2 - 9) = 2n + 1 > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$,

zatem ciąg (a_n) jest rosnący

b) $a_n = \frac{n^2}{2}$

c) $a_n = n^2 + 4n - 3$

Ciąg (a_n) jest malejący, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n < 0$).

20. Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

a) $a_n = 100 - n^2$

b) $a_n = n - 2n^2$

21. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = 3 - 5n$

b) $a_n = \sqrt{2}n - 4$

c) $a_n = 2n^2 - 6$

d) $a_n = -\frac{1}{2}n^2 + 3$

e) $a_n = -n^2 - 4n + 5$

f) $a_n = n^2 - n - 6$

22. Uzupełnij definicję.

a) Ciąg (a_n) jest niemalejący, jeśli ______________________________.

b) Ciąg (a_n) jest nierosnący, jeśli ______________________________.

23. Określ monotoniczność ciągu o podanych wyrazach.

a) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ... niemalejący

b) $-1, -1, -2, -2, -3, -3, -4, -4, \ldots$ ______________

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$ ______________

d) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$ ______________

24. Wykreśl z podanego ciągu część liczb tak, aby pozostałe liczby tworzyły ciąg:

a) rosnący: $1, 1, -1, -1, 2, 2, -2, -2, 3, 3, -3, -3, 4, 4, -4, -4, 5, 5, -5, -5, \ldots$

b) malejący: $1, 1, -1, -1, 2, 2, -2, -2, 3, 3, -3, -3, 4, 4, -4, -4, 5, 5, -5, -5, \ldots$

c) niemalejący, który nie jest ciągiem rosnącym:

$1, 1, -1, -1, 2, 2, -2, -2, 3, 3, -3, -3, 4, 4, -4, -4, 5, 5, -5, -5, \ldots$

25. Wykaż, że ciąg $a_n = 3n - n^2$ jest nierosnący.

$a_{n+1} =$

$a_{n+1} - a_n =$

26. Uzasadnij, że ciąg $a_n = 9n - n^2$ nie jest monotoniczny (wskazówka: oblicz kilka początkowych wyrazów tego ciągu).

4.4. Ciąg arytmetyczny (1)

27. W poniedziałek Zbyszek włożył do skarbonki 15 zł. Każdego następnego dnia wrzucał do skarbonki po 8 zł. Uzupełnij diagram przedstawiający stan jego oszczędności.

poniedziałek	wtorek	środa	czwartek	piątek	sobota	niedziela
$a_1 = 15$	$a_2 = 23$	$a_3 =$	$a_4 =$	$a_5 =$	$a_6 =$	$a_7 =$

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągiem arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r, że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.
Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu.

28. W poniedziałek Tomek miał w skarbonce 300 zł. Od wtorku codziennie wyjmował ze skarbonki po 35 zł. Podaj stan oszczędności Tomka w kolejnych dniach tygodnia.

Pon.	Wt.	Śr.	Czw.	Pt.	Sob.	Niedz.
$a_1 = 300$	$a_2 = 265$	$a_3 =$	$a_4 =$	$a_5 =$	$a_6 =$	$a_7 =$

29. Wyznacz wzór ogólny podanego ciągu arytmetycznego. Oblicz setny wyraz tego ciągu.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

a) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

$r = 2$

$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 =$

$= 2n - 1$

$a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 199$

b) $6, 6\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3}, 7, 7\frac{1}{3}, \ldots$

c) $6, 2, -2, -6, -10, \ldots$

30. Oblicz wskazane wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli r jest jego różnicą.

a) $a_1 = -10$, $r = 3$

$a_5 =$ ______

$a_{10} =$ ______

$a_{15} =$ ______

b) $a_1 = 5$, $r = -\frac{2}{3}$

$a_7 =$ ______

$a_{13} =$ ______

$a_{18} =$ ______

31. Między podane liczby wpisz taką liczbę, aby otrzymać kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

Jeżeli liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to $b = \frac{a+c}{2}$.

a) 18, ____, 32 b) -7, ____, -19 c) 3, ____, -14

32. Uzupełnij tak, aby otrzymać kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

a) 10, ____, ____, 34

$10 + 3r = 34$
$3r = 24$
$r = 8$

b) 5, ____, ____, 32

c) 10, ____, ____, ____, ____, ____, 34

d) 34, ____, ____, ____, 10

33. Uzupełnij tak, aby otrzymać kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

a) ____, ____, ____, 18, ____, 19

b) 17, ____, ____, 11, ____, ____

c) ____, 2, ____, ____, ____, 14

d) ____, ____, ____, ____, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{5}{3}$

34. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n).

a) $a_2 = -7$, $a_8 = 11$

$a_8 = a_2 + 6r$
$11 = -7 + 6r$
stąd $r = 3$
$a_2 = a_1 + r$
$-7 = a_1 + 3$
stąd $a_1 = -10$

b) $a_9 = 60$, $a_{21} = 0$

c) $a_4 = 1\frac{2}{3}$, $a_{11} = 4$

35. Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Podaj różnicę tego ciągu.

a) $x+1,\ 4x-1,\ 3x+5$

c) $x+3,\ x^2,\ 4x$

b) $-x,\ 3x+1,\ -6-x$

d) $x^2+2,\ (x+1)^2,\ 4x^2+1$

4.5. Ciąg arytmetyczny (2)

36. Przeczytaj przykład w ramce, a następnie wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 4n - 6$

Przykład

Wykaż, że ciąg $a_n = 3n + 4$ jest ciągiem arytmetycznym.

Obliczamy:

$$a_{n+1} = 3(n+1) + 4 = 3n + 7$$

i wyznaczamy różnicę między kolejnymi wyrazami ciągu:

$a_{n+1} - a_n = 3n + 7 - (3n + 4) = 3$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Zatem (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 3$.

b) $a_n = \frac{1}{2}n - 5$

c) $a_n = -5n + 9$

37. Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) i określ jego monotoniczność.

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:
- **rosnący**, gdy $r > 0$;
- **stały**, gdy $r = 0$;
- **malejący**, gdy $r < 0$.

a) $a_n = \frac{5n-1}{2}$ $a_{n+1} =$

$r = a_{n+1} - a_n =$

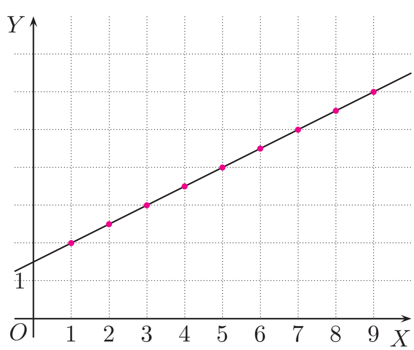
$r > 0$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym

b) $a_n = 6 - 7n$

c) $a_n = \sqrt{3}n + 1$

d) $a_n = [1 - 0{,}(9)]n$

38. Wykres ciągu arytmetycznego (a_n) zawiera się w wykresie pewnej funkcji liniowej (rysunek obok). Podaj wzór ogólny tego ciągu. Określ jego monotoniczność oraz wyznacz wyrazy a_{11} i a_{12}.



39. Naszkicuj prostą, w której zawiera się wykres ciągu arytmetycznego (a_n). Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = 3 - n$

b) $a_n = \frac{-8+n}{2}$

40. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego poniższe warunki. Który wyraz tego ciągu jest równy 0?

a) $\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_4 = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 12 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 27 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 5 \\ a_1 + a_3 = -4 \end{cases}$

41. Dany jest ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 9 - 4k^2$. Zbadaj monotoniczność tego ciągu w zależności od parametru k.

4.6. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

42. Oblicz sumę szesnastu początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego.

a) $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$

$a_1 = 3, \ \ r = 4$

$a_{16} = 3 + 15 \cdot 4 = 63$

$S_{16} =$

b) $-6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

c) $13, 10, 7, 4, 1, \ldots$

d) $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$

43. Wyznacz liczbę wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego oraz oblicz ich sumę.

a) $6, 10, 14, \ldots, 42$

$a_1 = 6$, $r = 4$, n – liczba wyrazów

$a_n = 6 + (n-1) \cdot 4 = 42$

$4n + 2 = 42$, stąd $n = 10$

$S_{10} =$

b) $-5, -2, 1, 4, \ldots, 286$

c) $6, 5\frac{1}{2}, 5, 4\frac{1}{2}, 4, \ldots, -18\frac{1}{2}$

d) $8, 5, 2, \ldots, -25$

44. Oblicz sumę, której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

a) $6 + 11 + 16 + \ldots + 101$

c) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{7}{3} + \ldots + \frac{25}{3}$

b) $-4 - 7 - 10 - \ldots - 37$

d) $-4{,}2 - 4{,}4 - 4{,}6 - \ldots - 27{,}2$

45. Oblicz sumę wszystkich liczb:

a) dwucyfrowych podzielnych przez 3,

c) trzycyfrowych parzystych,

b) dwucyfrowych podzielnych przez 7,

d) czterocyfrowych nieparzystych.

46. Uzasadnij wzór.

a) $6 + 12 + 18 + \ldots + 6n = 3n(n + 1)$ b) $4+10+16+\ldots+(6n-2) = n(3n+1)$

47. Przeczytaj przykład w ramce i oblicz, ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: $3, 5, 7, 9, \ldots$ należy dodać, aby otrzymać liczbę 255.

Przykład

Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: $5, 8, 11, \ldots$ należy dodać, aby otrzymać liczbę 185?

$a_1 = 5$, $r = 3$, $S_n = 185$

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3$ i stąd:

$$\frac{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n = 185 \quad / \cdot 2$$

$$3n^2 + 7n = 370$$

$$3n^2 + 7n - 370 = 0$$

$$\Delta = 4489, \quad \sqrt{\Delta} = 67$$

$$n_1 = \frac{-7-67}{6} < 0, \text{ sprzeczne}$$

$$n_2 = \frac{-7+67}{6} = 10$$

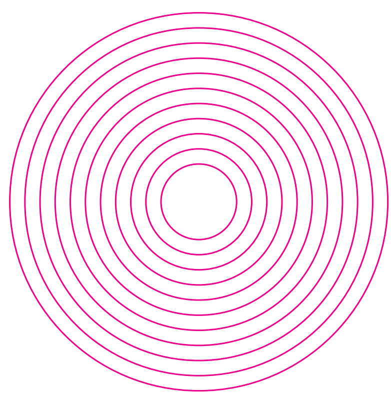
Należy dodać 10 początkowych wyrazów.

48. Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: $-7, -5, -3, -1, 1, \ldots$ należy dodać, aby otrzymać liczbę 209?

49. Ile co najmniej początkowych wyrazów danego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymana suma była większa od 200?

a) $-9, -7, -5, -3, -1, 1, \ldots$

b) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, \ldots$



50. Dane są okręgi o promieniach 0,5 cm, 0,7 cm, 0,9 cm, ..., 2,5 cm (rysunek obok). Czy suma długości tych okręgów jest większa od 1 m?

51. Pierścień P_n ograniczony jest okręgami o promieniach n cm i $(n+1)$ cm.

a) Wykaż, że pola pierścieni $P_1, P_2, P_3, \ldots$ tworzą ciąg arytmetyczny.

b) Oblicz $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{99}$.

4.7. Ciąg geometryczny (1)

52. Pole pierwszego prostokąta jest równe $\frac{1}{3}$. Pole każdego następnego prostokąta otrzymujemy, mnożąc przez $\frac{3}{2}$ pole prostokąta poprzedniego. Podaj pole każdego z prostokątów.

$P_1 = \frac{1}{3}$ $P_2 = \frac{1}{2}$ $P_3 =$ $P_4 =$ $P_5 =$ $P_6 =$ $P_7 =$

53. Dany jest ciąg kwadratów. Bok pierwszego kwadratu ma długość 1 cm. Bok każdego następnego kwadratu jest dwa razy dłuższy od boku poprzedniego kwadratu. Podaj pola pierwszych ośmiu kwadratów.

$P_1 = 1\ \text{cm}^2$	$P_3 =$ ______	$P_5 =$ ______	$P_7 =$ ______
$P_2 =$ ______	$P_4 =$ ______	$P_6 =$ ______	$P_8 = 16\,384\ \text{cm}^2$

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągiem geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q, że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$. Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu.

54. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o podanym ilorazie q.

a) $a_1 = \frac{1}{8}$, $q = 2$ $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ______, ______, ______, ______

b) $a_1 = -3$, $q = -1$ ______, ______, ______, ______, ______, ______

c) $a_1 = 16$, $q = -\frac{1}{4}$ ______, ______, ______, ______, ______, ______

d) $a_1 = 1$, $q = \sqrt{2}$ ______, ______, ______, ______, ______, ______

55. Wyznacz wzór ogólny podanego ciągu geometrycznego. Oblicz jedenasty wyraz tego ciągu.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

a) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, \ldots$

$a_1 = \frac{1}{4}$, $q = -2$

$a_n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^{n-1}$

$a_{11} = \frac{1}{4} \cdot (-2)^{10} =$

$= 2^{-2} \cdot 2^{10} = 2^8 = 256$

b) $-\frac{1}{32}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$

c) $-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots$

56. Uzupełnij tak, aby otrzymać kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

a) ____, $\frac{2}{5}$, 2, ____, ____, ____

b) ____, ____, -3, 9, ____, ____

57. Uzupełnij tak, aby otrzymać kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

a) ____, 2, ____, ____, 54, ____

b) 5, ____, ____, ____, ____, -160

$2 \cdot q^3 = 54$

$q^3 =$

58. Oblicz iloraz i wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n).

a) $a_3 = -12$, $a_4 = 24$

b) $a_2 = -27$, $a_5 = -8$

c) $a_3 = 4$, $a_8 = -\frac{1}{8}$

4.8. Ciąg geometryczny (2)

> Jeśli liczby a, b, c są różne od zera, to tworzą ciąg geometryczny, wtedy i tylko wtedy, gdy:
> $$b^2 = a \cdot c.$$

59. Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

a) $x,\ x+1,\ 2x+2$

b) $3x+4,\ 2x,\ 2x+6$

60. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n).

a) $\begin{cases} a_3 = -3a_4 \\ a_2 - a_1 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_2 + 8a_5 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ a_2 + a_4 = 8 \end{cases}$

61. Wykaż, że ciąg o podanym wzorze ogólnym jest ciągiem geometrycznym.

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla dowolnego $n \geqslant 1$ iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

a) $a_n = 2 \cdot 3^n$ $a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = 3$ dla każdego $n \geqslant 1$,

ciąg (a_n) jest zatem ciągiem geometrycznym

b) $a_n = \frac{5^n}{6}$

c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d) $a_n = 3^{2n-1}$

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ jest:

- **rosnący**, gdy $q > 1$;
- **malejący**, gdy $0 < q < 1$;
- **stały**, gdy $q = 1$.

62. Podaj sześć początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, a następnie określ monotoniczność tego ciągu. Uzupełnij informację w ramce.

a) $a_1 = -8$, $q = 2$ -8, ____, ____, ____, ____, ____, ciąg ________

b) $a_1 = -8$, $q = \frac{1}{2}$ -8, ____, ____, ____, ____, ____, ciąg ________

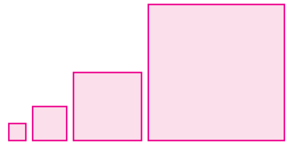
Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 < 0$ jest **rosnący**, gdy ______; **malejący**, gdy ______; **stały**, gdy ______.

63. Określ monotoniczność ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q.

a) $a_1 = 3$, $q = \sqrt{3} - 1$ b) $a_1 = 4$, $q = 1 - \sqrt{2}$ c) $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{\sqrt{10}}{3}$

4.9. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

64. Dany jest ciąg kwadratów o polach równych kolejno: $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16, 64, 256, ... Oblicz kolejne sumy pól.



$S_1 = \frac{1}{4}$

$S_2 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4}$

$S_3 = \frac{1}{4} + 1 + 4 =$ _____

$S_4 =$ _____

$S_5 =$ _____

$S_6 =$ _____

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

65. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów podanego ciągu geometrycznego.

a) 4, 8, 16, 32, 64, ... _____

b) 1, 3, 9, 27, 81, ... _____

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ _____

d) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ _____

66. Oblicz sumę podanego ciągu geometrycznego.

a) $8 - 4 + 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

Jest to suma ośmiu wyrazów ciągu geometrycznego: $a_1 = 8$, $q = -\frac{1}{2}$.

$S_8 =$

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$

c) $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \frac{81}{16} + \frac{243}{32}$

d) $4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \frac{81}{64}$

67. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n).

a) $a_1 = 1$, $q = -2$, $n = 5$

b) $a_1 = -1$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 6$

68. Ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q należy zsumować, aby otrzymać liczbę s?

a) $a_1 = 5,\ q = 2,\ s = 1275$

$S_n = 5 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 5 \cdot \frac{1-2^n}{-1} = 5(2^n - 1)$

stąd $5(2^n - 1) = 1275 /: 5$

$2^n - 1 =$

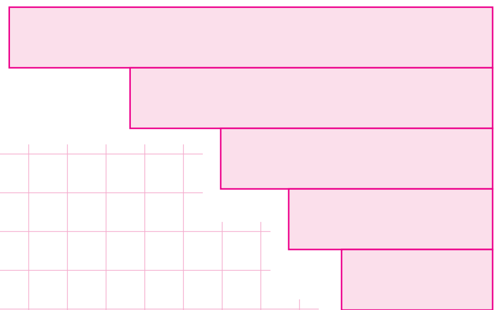
$2^n =$

$n =$

Należy zsumować ___ wyrazów.

b) $a_1 = 4,\ q = -3,\ s = 244$

69. Pole narysowanej obok figury jest równe 1562. Pola kolejnych prostokątów tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{3}{4}$. Oblicz pole najmniejszego prostokąta.



70. Długości krawędzi czterech sześciennych pudełek tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{2}{3}$. Pudełka te ustawiono jedno na drugim i otrzymano wieżę o wysokości 65 cm. Czy najmniejsze pudełko ma objętość większą od 0,5 dm^3?

71. a) Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a iloraz 4. Wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.

b) Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $\frac{77}{8}$. Iloraz tego ciągu jest równy $-\frac{1}{2}$. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

72. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a iloraz -2. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu:

a) o numerach nieparzystych,

b) o numerach parzystych.

4.10. Procent składany

73. Pani Kasia wpłaciła do banku kwotę k zł. Na koniec roku bank doliczy r odsetek. Ile wyniosą dopisane odsetki? Podaj kwotę k_1, do której wzrośnie kapitał pani Kasi po roku.

a) $k = 1000$, $r = 3\%$ b) $k = 500$, $r = 6\%$ c) $k = 2000$, $r = 4\%$

$1000 \cdot 3\% =$ ______

$k_1 =$ ______

74. Kapitał k zł wpłacono do banku na lokatę oprocentowaną r w skali roku. Ile razy zwiększy się ten kapitał po roku?

a) $r = 20\%$ b) $r = 10\%$ c) $r = 5\%$

$k + 0{,}2k = 1{,}2k$

1,2 razy

75. Pan Michał wpłacił do banku 2000 zł. Po każdym roku bank dolicza 5% odsetek. Oblicz, do jakiej kwoty wzrośnie kapitał pana Michała:

Kapitał w wysokości k złożony na rok, przy oprocentowaniu rocznym w wysokości r, wynosi po roku $k(1 + r)$.

a) po roku, b) po dwóch latach, c) po trzech latach.

a) $k_1 = 1{,}05 \cdot 2000 =$
$= 2100$ [zł]

b) $k_2 = 1{,}05 \cdot 2100 =$

c) $k_3 =$

76. Na koniec każdego roku bank dolicza 5% odsetek. Jaką kwotę odbierzemy po roku, a jaką po dwóch latach, jeśli wpłaciliśmy do banku 5000 zł, a od naliczonych odsetek bank potrąca podatek w wysokości 20%?

77. Kapitał k złożono w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym 10%. Uzupełnij tabelę (podaj wielkość kapitału z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku).

Kapitał w wysokości k, przy oprocentowaniu rocznym w wysokości r, wynosi po n latach $k_n = k(1 + r)^n$.

n	1	2	3	4	5	10
Kapitał k_n	$1{,}1k$					

78. Kapitał 4000 zł złożono w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym r. Wyznacz wielkość kapitału po n latach.

a) $n = 4$, $r = 2{,}5\%$ b) $n = 6$, $r = 3\%$ c) $n = 10$, $r = 4{,}5\%$

$k_4 = 4000 \cdot (1{,}025)^4 =$ $k_6 =$

$=$

79. W tabeli podano stopy procentowe w kolejnych pięciu latach w bankach A, B i C. Oblicz, do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 1000 zł po pięciu latach w każdym z tych banków. Ile wyniosą odsetki?

Rok	1	2	3	4	5
Bank A	5%	5%	4%	4%	2%
Bank B	4%	4%	2%	5%	5%
Bank C	4,5%	4,5%	3%	3%	3%

Bank A: $k_5 = 1000 \cdot (1{,}05)^2 \cdot (1{,}04)^2 \cdot 1{,}02 = 1216{,}31$ zł odsetki 216,31 zł

Bank B: odsetki

Bank C: odsetki

80. Banki A, B i C proponują oprocentowanie lokaty terminowej w wysokości 4% rocznie. W banku A odsetki są kapitalizowane co pół roku, w banku B – kwartalnie, a w banku C – co miesiąc. W którym banku po roku odsetki od kwoty 2000 zł będą największe? O ile procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

Jeśli roczna stopa procentowa jest równa r, a odsetki są kapitalizowane m razy w ciągu roku (w równych odstępach czasu), to kapitał po n latach wzrośnie do kwoty:

$$k\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

A: $k_A =$ odsetki wzrost

B: $k_B = 2000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^4 \approx 2081{,}21$ zł odsetki 81,21 zł wzrost o 4,06%

C: odsetki wzrost

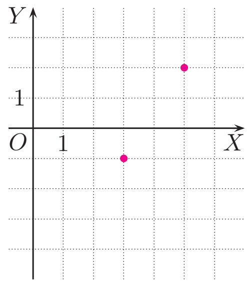
81. Bank oferuje dwie lokaty dwuletnie na następujących warunkach:
lokata I: oprocentowanie 3% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
lokata II: oprocentowanie 4% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku.
Która z tych lokat jest korzystniejsza?

Zestaw powtórzeniowy I

82. Podaj cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n). Czy jest to ciąg arytmetyczny?

a) $a_n = (n-3)^2$ b) $a_n = \frac{\sqrt{2}n+1}{5}$ c) $a_n = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$

83. Zaznaczone punkty (rysunek obok) należą do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n).



a) Wyznacz równanie prostej zawierającej wykres ciągu (a_n).

b) Podaj wzór ogólny ciągu (a_n).

c) Narysuj wykres ciągu (a_n) dla $n \leqslant 6$.

84. Które wyrazy ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 8$ i różnicy $r = 2$ należą do przedziału $(100; 200\rangle$?

85. a) Dla jakiej wartości x liczby $4x+1$, $5x-3$, $x+3$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

b) Liczby $3x+1$, $x+1$, x^2-1 są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

86. Oblicz sumę wszystkich liczb:

a) dwucyfrowych podzielnych przez 6,

b) mniejszych od 100, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2,

c) dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 5 lub 6,

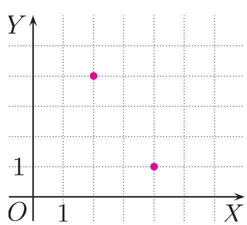
d) należących do przedziału $\langle 50; 150\rangle$ i podzielnych przez 3 lub przez 5.

87. a) Między 2 i 250 wstaw dwie takie liczby, aby wszystkie były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

b) Między 5 i 80 wstaw trzy takie liczby, aby wszystkie były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (rozpatrz dwie możliwości).

88. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n), w którym: a) $a_3 = 1$, $a_5 = 4$, b) $a_3 = -2$, $a_7 = -162$.

89. Punkty zaznaczone w układzie współrzędnych należą do wykresu monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n).



a) Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz ciągu (a_n).

b) Podaj wzór ogólny ciągu (a_n).

c) Który wyraz ciągu (a_n) jest równy $\frac{1}{1024}$?

d) Które wyrazy ciągu spełniają nierówność $a_n \leqslant \frac{1}{8}$?

Zestaw powtórzeniowy II

90. a) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 2. Suma wyrazów drugiego i ósmego jest o 6 większa od sumy wyrazów trzeciego i dziewiątego. Podaj wzór ogólny i wyznacz dwunasty wyraz tego ciągu.

b) Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8. Suma wyrazów piątego i siódmego jest o 10 większa od wyrazu dziewiątego. Podaj wzór ogólny i wyznacz piętnasty wyraz tego ciągu.

91. a) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Najkrótszy bok ma długość 2 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

b) Długości boków i przekątnej prostokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Pole prostokąta jest równe 48 cm^2. Wyznacz długości boków prostokąta.

92. a) Wyrazy pierwszy i drugi ciągu geometrycznego (a_n) są pierwiastkami równania $8x^2 - 2x - 1 = 0$. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu (rozpatrz dwa przypadki).

b) Wyrazy drugi i czwarty ciągu geometrycznego (a_n) są pierwiastkami równania $x^2 + 10x + 16 = 0$. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość pierwszego wyrazu tego ciągu?

93. Kapitał k złożony na n lat przy kapitalizacji rocznej wzrósł do kwoty k_1. Wyznacz roczną stopę procentową, jeśli:

a) $n = 2$, $k = 3600$ zł, $k_1 = 4006{,}89$ zł; b) $n = 4$, $k = 5200$ zł, $k_1 = 6201{,}10$ zł.

94. Jaką kwotę ulokowała w banku pani Ania, jeśli po czterech latach jej kapitał wzrósł do 1823 zł, a roczna stopa procentowa wynosiła 5% (przy rocznej kapitalizacji odsetek)? Jaką kwotę powinna wpłacić pani Ania, aby po czterech latach, przy stopie procentowej o połowę mniejszej, jej kapitał również wzrósł do 1823 zł?

95. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

a) $a_n = 20 - 2n^2$ b) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - n$ c) $a_n = n^2 + 8n - 10$

96. Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego (a_n) w zależności od parametru p.

a) $a_n = (p - 4)n + 3$ b) $a_n = (p^2 - 4)n + 3$

***97.** a) Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = \frac{1}{2}$. Uzasadnij, że ciąg $b_n = 3^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym.

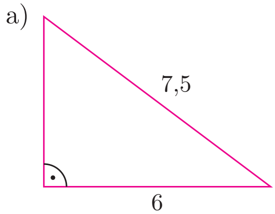
b) Uzasadnij, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n), gdzie $b_n = 3^{a_n}$, jest ciągiem geometrycznym.

5. Trygonometria

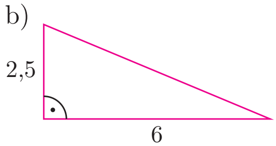
Trójkąty prostokątne – powtórzenie

1. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego.

a)



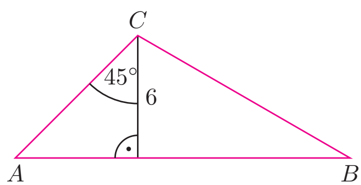
b)



2. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku 8 cm. Oblicz obwód trójkąta ADC, jeżeli odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC.

3. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli jego najdłuższy bok ma długość 8 cm.

4. Miara największego kąta trójkąta ABC jest równa 105°. Oblicz obwód tego trójkąta.

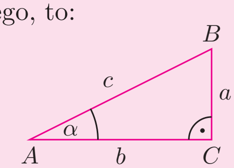


5.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

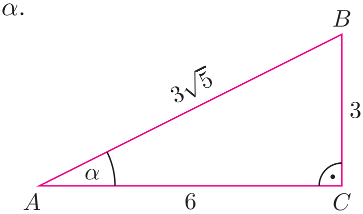
Jeżeli α jest kątem ostrym trójkąta prostokątnego, to:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

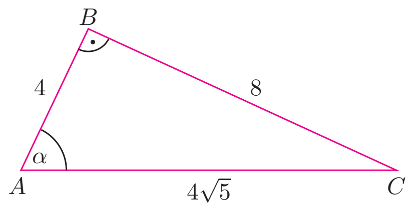


5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.



a) $\sin\alpha =$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha =$

$\cos\alpha =$



b) $\sin\alpha =$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha =$

$\cos\alpha =$

6. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych przyprostokątnych:

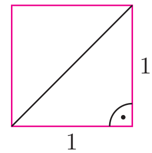
a) 9, 12

b) 4, 5

c) 1, 5

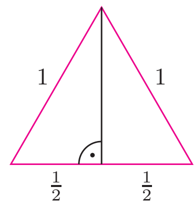
7. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $45°$.

$\sin 45° =$ $\cos 45° =$ $\operatorname{tg} 45° =$



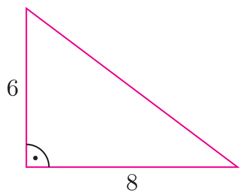
8. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $30°$.

$\sin 30° =$ $\cos 30° =$ $\operatorname{tg} 30° =$

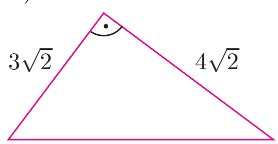


9. Zaznacz na rysunku kąt α, dla którego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

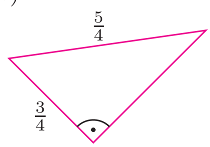
a)



b)

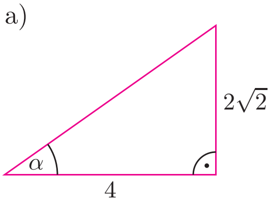


c)



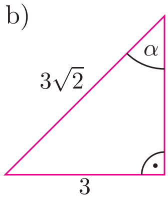
10. Uzupełnij jednym z symboli: $>$, $<$, $=$.

a)



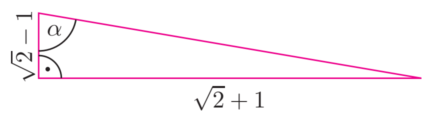
$\operatorname{tg}\alpha$ ☐ 1

b)



$\operatorname{tg}\alpha$ ☐ 1

c)

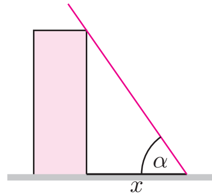


$\operatorname{tg}\alpha$ ☐ 1

11. Bok rombu ma długość $\sqrt{5}$, a jedna z jego przekątnych – 4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkątów, na które dzielą romb jego przekątne.

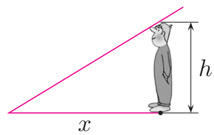
5.2. Trygonometria – zastosowania

12. Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość x w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt α.



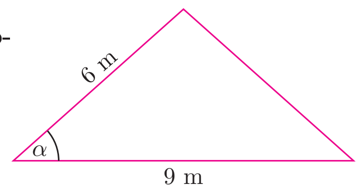
a) $x = 5$ m, $\alpha = 58°$　　b) $x = 12$ m, $\alpha = 39°$

13. Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli osoba o wzroście h rzuca cień długości x?

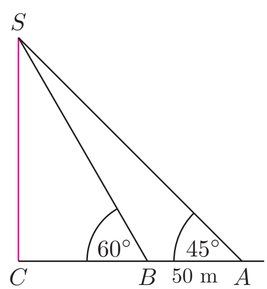


a) $h = 170$ cm, $x = 0{,}9$ m　　b) $h = 180$ cm, $x = 3$ m

14. Przekrój poprzeczny dachu jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości 9 m i ramionach długości 6 m. Oblicz cosinus kąta nachylenia dachu (kąt α na rysunku). Odczytaj z tablic przybliżoną wartość tego kąta.



15. Wierzchołek S komina jest widoczny z powierzchni ziemi pod kątem 45°, a po przejściu 50 m w kierunku komina – pod kątem 60° (rysunek obok). Oblicz wysokość komina.



16. O ile wyżej sięgnie sześciometrowa drabina ustawiona pod kątem 73° do ziemi od takiej samej drabiny ustawionej pod kątem 53°?

17. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5°.

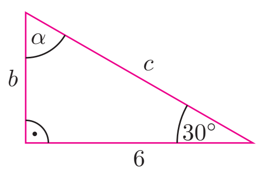
a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?

b) Jak długo musiałby iść tą drogą z prędkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m?

5.3. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

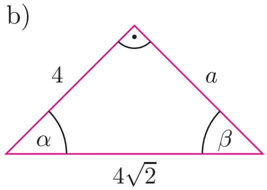
18. Rozwiąż trójkąt prostokątny.

a)



$b =$ $c =$ $\alpha =$

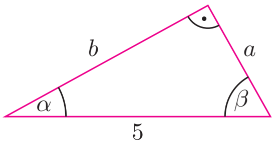
b)



$a =$ $\alpha =$ $\beta =$

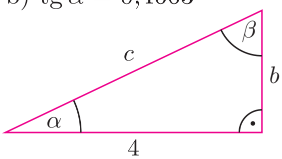
19. Rozwiąż trójkąt prostokątny.

a) $\cos\alpha = 0{,}8746$



$a \approx$ $\quad b \approx$ $\quad \alpha \approx$ $\quad \beta \approx$

b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4663$



$b \approx$ $\quad c \approx$ $\quad \alpha \approx$ $\quad \beta \approx$

20. Oblicz pole i obwód trójkąta równoramiennego:

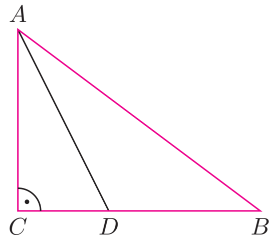
a) o ramieniu długości 4 i kącie przy podstawie 37°,

b) o podstawie długości 10 i kącie między ramionami 70°,

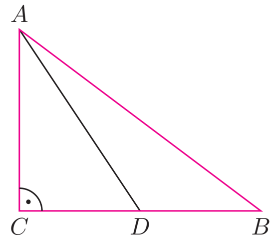
c) jeśli kąt między ramionami jest dziesięć razy większy od kąta przy podstawie, a najkrótsza wysokość jest równa 2.

21. W trójkącie ABC kąt CAB ma miarę $54°$, a $|AB| = 10$. Oblicz długość odcinka AD, jeżeli:

a) AD jest dwusieczną kąta CAB,



b) AD jest środkową.



22. a) Oblicz długości przekątnych rombu, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę $48°$.

b) Oblicz obwód i pole trapezu równoramiennego o podstawach długości 8 cm i 10 cm oraz kącie ostrym $72°$.

5.4. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

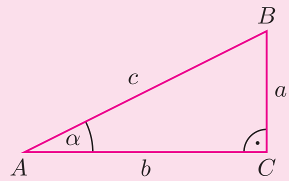
W trójkącie prostokątnym:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\quad\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\quad\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są zależności:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



23. Dokończ dowód jedynki trygonometrycznej.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} =$ ____________________

24. Napisz tożsamość trygonometryczną, której uzasadnieniem jest podana równość (przy oznaczeniach z powyższego rysunku).

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$$ ____________________

25. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$,

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

c) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$,

b) $\cos\alpha = 0{,}1$,

d) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$.

26. Korzystając z tożsamości: $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

27. Korzystając z tożsamości: $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 7$,

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$.

28. Czy istnieje kąt α, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$,

b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

c) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$,

d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

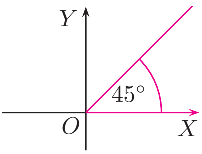
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

5.5. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)

29. Podaj współrzędne trzech punktów leżących na ramieniu końcowym kąta α.

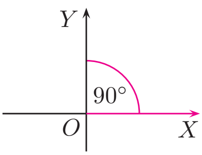
a) $\alpha = 45°$



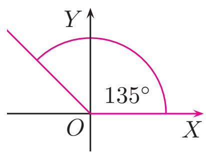
Rozpatrujemy kąty umieszczone w układzie współrzędnych.

- Początek układu jest wierzchołkiem kąta.
- Jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX.
- Drugie ramię zwane jego **ramieniem końcowym**, jest odłożone w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

b) $\alpha = 90°$

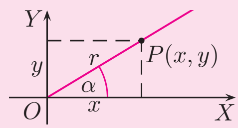


c) $\alpha = 135°$



Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$, różnym od początku układu współrzędnych.
Wtedy:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

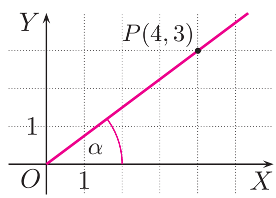


30. Punkt $P(4, 3)$ leży na ramieniu końcowym kąta α. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

$x =$ ______ $y =$ ______ $r = \sqrt{x^2 + y^2} =$ ______

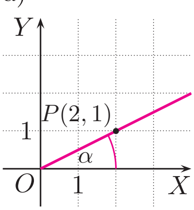
$\sin\alpha = \frac{y}{r} =$ ______ $\cos\alpha =$ ______

$\operatorname{tg}\alpha =$ ______

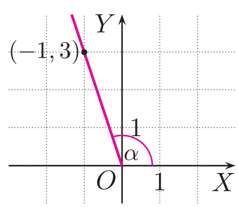


31. Punkt P leży na ramieniu końcowym kąta α. Wyznacz inny punkt o obu współrzędnych całkowitych leżący na tym ramieniu. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

a)

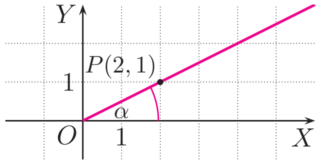


b)



32. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

a)



$x = 2,\ y = 1$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} =$

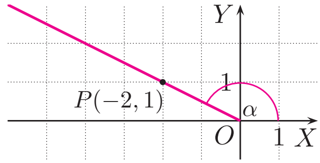
$= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha =$

$\operatorname{tg}\alpha =$

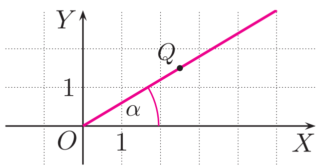
b)



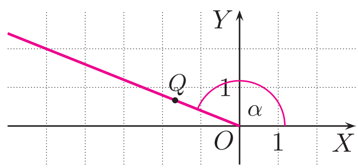
33. Punkt Q leży na końcowym ramieniu kąta α. Znajdź punkt P o obu współrzędnych całkowitych leżący na ramieniu tego kąta. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

Dla danego kąta α wybór punktu $P(x, y)$ leżącego na ramieniu końcowym tego kąta nie ma wpływu na wartości stosunków: $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) $Q\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$



b) $Q\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$



34. Skreśl punkty, które nie należą do ramienia końcowego kąta α.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\quad\alpha \in (0°; 90°)$ $\qquad P(1, 3)$, $\quad Q(3, 1)$, $\quad R(2, 6)$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, $\quad\alpha \in (0°; 90°)$ $\qquad P(4, 10)$, $\quad Q(10, 4)$, $\quad R(5, 2)$

c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{5}$, $\quad\alpha \in (90°; 180°)$ $\qquad P(-5, 3)$, $\quad \cancel{Q(5, -3)}$, $\quad \cancel{R(-3, 5)}$

d) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$, $\quad\alpha \in (90°; 180°)$ $\qquad P(2, -3)$, $\quad Q(-6, 9)$, $\quad R\left(-1, \frac{2}{3}\right)$

Dla $\alpha \in (0°; 90°)$ zachodzą nierówności: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Dla $\alpha \in (90°; 180°)$ zachodzą nierówności: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

35. W miejsce $\square$ wpisz „+”, gdy wyrażenie jest dodatnie oraz „–”, gdy jest ujemne.

a) $\sin 132° \cdot \operatorname{tg} 94°$ $\square$

b) $\sin 68° \cdot \cos 102°$ $\square$

c) $\cos 96° \cdot \operatorname{tg} 143°$ $\square$

d) $\sin 37° \cdot \cos 137° \cdot \operatorname{tg} 137°$ $\square$

e) $\sin 91° \cdot \operatorname{tg} 92° \cdot \operatorname{tg} 117°$ $\square$

f) $\cos 166° \cdot \cos 179° \cdot \operatorname{tg} 95°$ $\square$

α	$0°$	$90°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\times$	0

36. W miejsce $\square$ wpisz „=” lub „≠”.

a) $\sin 60° \cdot \cos 90° \cdot \operatorname{tg} 30°$ $\square$ 0.

b) $\sin 45° \cdot \sin 90° \cdot \operatorname{tg} 60°$ $\square$ 0.

c) $\sin 30° \cdot \cos 180° + \cos 60° \cdot \sin 90°$ $\square$ 0.

d) $\sin 30° \cdot \sin 180° - \sin 45° \cdot \cos 0° - \cos 45° \cdot \cos 180°$ $\square$ 0.

Dla dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$ prawdziwe są zależności:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ dla $\alpha \neq 90°$

37. Uzasadnij, że dla dowolnego $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$, $\alpha \neq 90°$ zachodzi równość.

a) $\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha = 0$

b) $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

38. Oblicz: $\cos^2\alpha$ i $\cos\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 90°; 180° \rangle$ oraz:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$,

b) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$,

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

39. Oblicz: $\sin^2\alpha$ i $\sin\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 90°; 180° \rangle$ oraz:

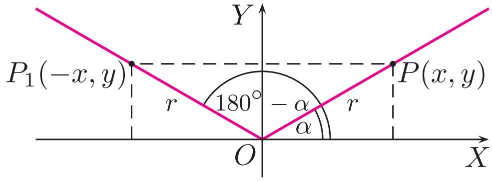
a) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$,

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$,

c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)

40. Punkt $P(x, y)$ należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt $P_1(-x, y)$ – do ramienia końcowego kąta $180° - \alpha$. Korzystając z rysunku, uzasadnij tożsamość.



a) $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$

b) $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$

c) $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{y}{-x}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$

zatem

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

41. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

a) $\alpha = 120°$

b) $\alpha = 135°$

c) $\alpha = 150°$

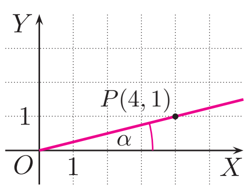
$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

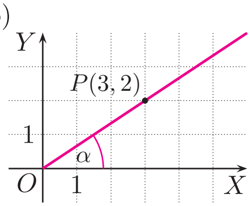
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

42. Korzystając z rysunku, oblicz $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$.

a)



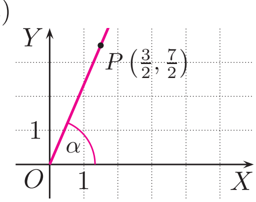
b)



$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$

c)



43. Oblicz.

a) $\cos 120^\circ - \sin 30^\circ$

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, $\quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

Zatem $\cos 120^\circ - \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

b) $\cos 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 150^\circ$

c) $\sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ$

44. Przeczytaj podany w ramce przykład.

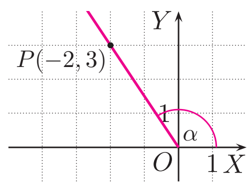
Narysuj kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$, taki że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, więc punkt $P(-2, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α. Zaznaczamy ten punkt w układzie współrzędnych i rysujemy kąt α.

$r = |OP| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

stąd $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$



Znając $\operatorname{tg}\alpha$ narysuj kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ oraz oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

a) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$

45. Oblicz.

a) $\dfrac{\cos 120^\circ + \sin 150^\circ}{\operatorname{tg} 135^\circ}$ c) $\dfrac{\sin 135^\circ - \cos 135^\circ}{\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 150^\circ}$ e) $\dfrac{\cos 150^\circ + \sin 120^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 150^\circ}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 120^\circ}$ d) $\dfrac{\operatorname{tg} 135^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ}$ f) $\dfrac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\cos 150^\circ + \cos 60^\circ}$

Zestaw powtórzeniowy I

46. Uzupełnij tabelę, a następnie oblicz wartość wyrażenia.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$		
$\cos\alpha$			$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$		1	

a) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$

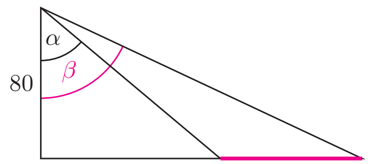
b) $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$

c) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ$

47. Dany jest trapez równoramienny o podstawach długości 3 cm i 9 cm, którego obwód wynosi 22 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między dłuższą podstawą trapezu:

a) a jego ramieniem, b) a jego przekątną.

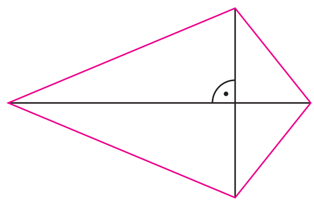
48. Z tarasu widokowego widać brzegi rzeki pod kątem $\alpha = 50^\circ$ i $\beta = 65^\circ$ (rysunek obok). Oblicz szerokość rzeki.



49. Wyznacz kąt ostry α spełniający podany warunek.

a) $2\cos\alpha = \frac{5}{4} - \frac{1-\cos\alpha}{2}$ b) $4\sin\alpha + 4 = (1+\sqrt{3})^2$ c) $\sin\alpha + 1 = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$

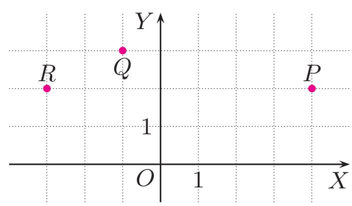
50. Przekątne deltoidu mają długości 10 cm i 16 cm (rysunek obok). Krótsza przekątna dzieli dłuższą w stosunku 3 : 1. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, wyznacz przybliżone miary kątów tego deltoidu.



51. Wyznacz przybliżone miary kątów rombu, którego jedna przekątna jest dwa razy dłuższa od drugiej.

52. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, do którego ramienia końcowego należy punkt:

a) P, b) Q, c) R.



53. Podaj dowolny punkt leżący na ramieniu końcowym kąta α. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$

54. Uzasadnij, że jeśli $\alpha \in \langle 0^\circ; 90^\circ\rangle$, to zachodzi równość:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2(180 - \alpha) = 1$, b) $1 - \cos^2\alpha = \sin^2(180^\circ - \alpha)$.

Zestaw powtórzeniowy II

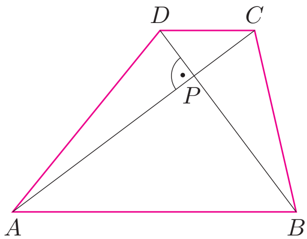
55. Oblicz wysokość trójkąta opuszczoną na bok długości 12, jeżeli kąty przy tym boku są równe 30° i 45°.

56. Dany jest trapez prostokątny o podstawach długości 2 cm i 14 cm i obwodzie 34 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, jaki z dłuższą podstawą trapezu tworzy:

a) jego dłuższe ramię, b) jego dłuższa przekątna.

57. Przekątne trapezu przecinają się pod kątem prostym w punkcie P (rysunek obok). Punkt P dzieli przekątną AC na odcinki o długościach 6 cm i 2 cm, a przekątna BD ma długość 6. Wyznacz, z dokładnością do 1°, kąty ostre trójkąta:

a) ABP, b) APD, *c) ABD.



58. Wyznacz liczbę $t > 0$ spełniającą podane równanie. Podaj kąt ostry α, dla którego $\sin\alpha = t$.

a) $(2t-1)(2t+1) = 2$ b) $2(t-1)^2+2(t+1)^2 = 5$ c) $2(t-1)^2 = 3-4t$

59. Wykonaj odpowiedni rysunek i uzasadnij, że punkt $P(1, \sqrt{3})$ należy do ramienia końcowego kąta 60°. Korzystając ze współrzędnych punktu P, wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60°.

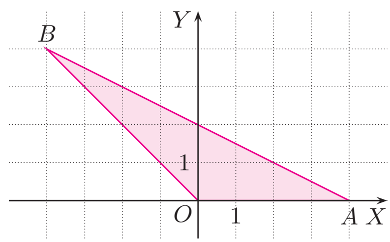
60. Podaj kąt, do którego ramienia końcowego należy punkt P. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P(2\sqrt{3}, 2)$ b) $P(-1, \sqrt{3})$ c) $P(-3, \sqrt{3})$

61. Dany jest trójkąt OAB (rysunek obok). Podaj:

a) wartości funkcji trygonometrycznych kątów BOA i OAB,

b) przybliżone miary kątów OAB i ABO.



62. Oblicz.

a) $\cos 60^\circ \cdot (\sin 0^\circ + \sqrt{3}\sin 120^\circ)$

b) $(\cos 135^\circ - \cos 45^\circ) \cdot \operatorname{tg} 135^\circ$

c) $\dfrac{\sin 60^\circ - \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 150^\circ}$

d) $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 150^\circ$

e) $\sin^2 30^\circ + \sin^2 120$

f) $\dfrac{\cos^2 25^\circ + \sin^2 155^\circ}{\sin 150^\circ}$

MATeMAtyka

Nowoczesny i praktyczny zeszyt ćwiczeń dla każdego ucznia

- Sprawdzone narzędzie do pracy na lekcji i do samodzielnej pracy w domu.
- Pełne lub częściowe rozwiązania wspomagające ucznia w nauce.
- Zestawy powtórzeniowe utrwalające wiadomości z każdego działu.

Polecamy:

Podręcznik ***Zbiór zadań***

Solidne powtórzenie na końcu każdego działu

Zadania typu maturalnego

Ciekawe infografiki zachęcające uczniów do samodzielnych poszukiwań

Doskonałe narzędzia zarówno do pracy na lekcji, jak i do samodzielnej pracy w domu

Zadania o zróżnicowanym stopniu trudności

Zadania o podwyższonym stopniu trudności dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką

Do obu zakresów: podstawowego i rozszerzonego

Dla ucznia przygotowaliśmy:

- podręcznik
- zeszyt ćwiczeń
- zbiór zadań
- zbiory zadań maturalnych

Nauczycielom polecamy:

- program nauczania
- książkę nauczyciela
- generator sprawdzianów

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-1506-8