

1

MATeMATyka

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska

Zakres podstawowy

Ćwiczenia i zadania
dla szkół ponadgimnazjalnych

MATeMATyka

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska

Zakres podstawowy

Ćwiczenia i zadania
dla szkół ponadgimnazjalnych

MATeMATyka

Ćwiczenia i zadania *MATeMATyka 1* uzupełniają podręcznik autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Doroty Ponczek *MATeMATyka 1*, dopuszczony do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki na poziomie ponadgimnazjalnym w zakresie podstawowym.

Numer ewidencyjny podręcznika w wykazie MEN: 378/1/2011

Numer ewidencyjny podręcznika (spełniającego wymóg wieloletniości) w wykazie MEN: 378/1/2011/2015

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo.
Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2012

ISBN 978-83-267-0904-3

Wydanie czwarte

Warszawa 2016

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Małgorzata Trzeciak

Współpraca redakcyjna: Monika Jankowska, Katarzyna Radziwińska

Konsultacje merytoryczne: Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Monika Krzywoszyńska

Korekta językowa: Zofia Psota, Anna Wasilewska

Projekt graficzny okładki: Elżbieta Król

Fotografia na okładce: thinkstockphotos.com/Getty Images/iStockphoto

Projekt graficzny zeszytu ćwiczeń: Lech Chańko

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Skład systemem T_EX: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.

Al. Jerozolimskie 146D, 02-305 Warszawa

tel.: 22 570 25 80; faks: 22 570 25 81

infolinia: 801 88 10 10 (z telefonów stacjonarnych)

58 721 48 00 (z telefonów komórkowych)

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Druk i oprawa: DRUK-SERWIS Sp. z o.o. Ciechanów

Spis treści

1. Liczby rzeczywiste	5
1.1. Liczby naturalne	5
1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne	6
1.3. Liczby niewymierne	9
1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej	10
1.5–1.6. Pierwiastek z liczby nieujemnej. Działania na pierwiastkach	11
1.7. Pierwiastek nieparzystego stopnia	13
1.8. Potęga o wykładniku całkowitym	14
1.9. Notacja wykładnicza	17
1.10. Przybliżenia	18
1.11. Procenty (1)	20
1.12. Procenty (2)	22
Zestaw powtórzeniowy I	24
Zestaw powtórzeniowy II	25
2. Język matematyki	26
2.1. Zbiory	26
2.2. Działania na zbiorach	27
2.3. Przedziały	30
2.4. Działania na przedziałach	31
2.5. Rozwiązywanie nierówności (1)	33
2.6. Rozwiązywanie nierówności (2)	35
2.7. Mnożenie sum algebraicznych	37
2.8. Wzory skróconego mnożenia	38
2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych	40
2.10. Wartość bezwzględna	42
2.11. Błąd bezwzględny i błąd względny	43
Zestaw powtórzeniowy I	45
Zestaw powtórzeniowy II	46
3. Funkcja liniowa	47
3.1. Sposoby opisu funkcji	47
3.2. Wykres funkcji liniowej (1)	49
3.3. Wykres funkcji liniowej (2)	50
3.4. Własności funkcji liniowej	52
3.5. Równanie prostej na płaszczyźnie	54
3.6. Współczynnik kierunkowy prostej	55
3.7. Warunek prostokątności prostych	57
3.8. Układy równań liniowych (1)	58
3.9. Układy równań liniowych (2)	59
3.10. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych	61
3.11. Funkcja liniowa – zastosowania	63
Zestaw powtórzeniowy I	64
Zestaw powtórzeniowy II	65

4. Funkcje	66
4.1. Dziedzina i miejsca zerowe funkcji	66
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji	67
4.3. Monotoniczność funkcji	69
4.4. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)	70
4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)	72
4.6. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY	74
4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX	76
4.8. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX	78
4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY	80
4.10. Funkcje – zastosowania	81
Zestaw powtórzeniowy I	82
Zestaw powtórzeniowy II	83
5. Funkcja kwadratowa	84
5.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$	84
5.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY	85
5.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)	87
5.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)	89
5.5. Równania kwadratowe (1)	91
5.6. Równania kwadratowe (2)	93
5.7. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)	96
5.8. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)	98
5.9. Nierówności kwadratowe	100
5.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)	102
5.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)	105
Zestaw powtórzeniowy I	107
Zestaw powtórzeniowy II	108
6. Planimetria	109
6.1. Miary kątów w trójkącie	109
6.2. Trójkąty przystające	112
6.3. Trójkąty podobne	114
6.4. Wielokąty podobne	117
* 6.5. Twierdzenie Talesa	119
6.6. Trójkąty prostokątne	121
Zestaw powtórzeniowy I	124
Zestaw powtórzeniowy II	125
Odpowiedzi do zestawów powtórzeniowych	126
Wartości funkcji trygonometrycznych	128



Zadanie do rozwiązania w zeszycie.

*Zadanie trudniejsze.

Niebieskim paskiem oznaczono zadania wykraczające poza zakres podstawowy.

3. Funkcja liniowa

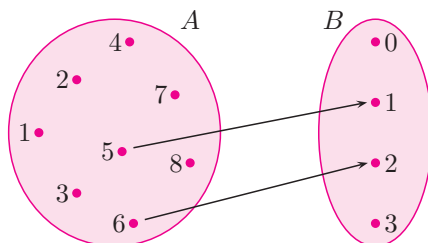
3.1. Sposoby opisu funkcji

1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie $x \in A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ wartość $f(x) \in B = \{0, 1, 2, 3\}$ będącą resztą z dzielenia liczby x przez 4. Uzupełnij:

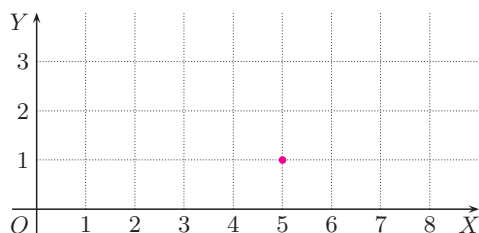
a) tabelę,

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$					1	2		

b) graf,



c) wykres.

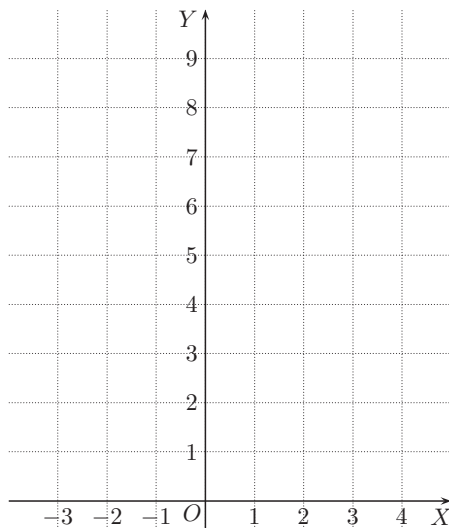


2. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ jej kwadrat. Przedstaw funkcję f za pomocą:

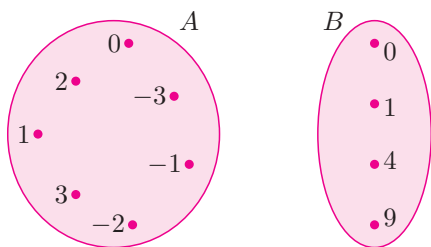
a) tabeli,

x							
$f(x)$							

c) wykresu.



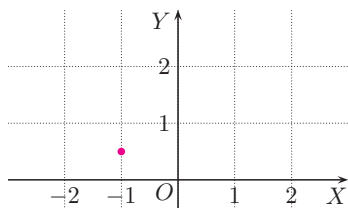
b) grafu,



3. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Uzupełnij tabelę i wykres.

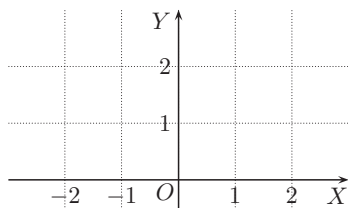
a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$		$\frac{1}{2}$			



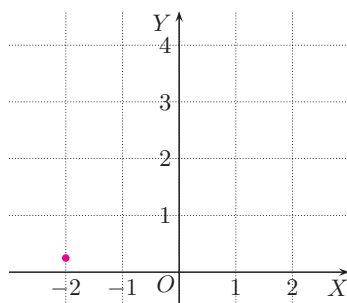
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



4. Uzupełnij tabelę i wykres funkcji $f(x) = 2^x$, której dziedziną jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

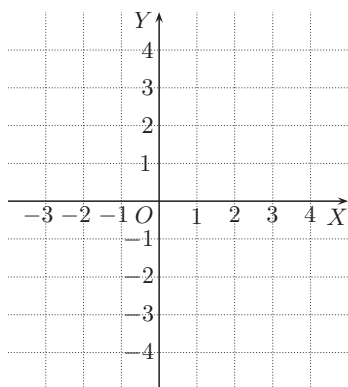
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					4



5. Sporządź tabelę i wykres funkcji f , której dziedziną jest zbiór $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

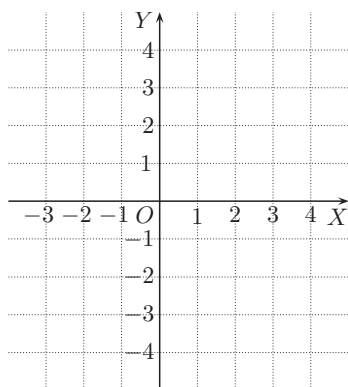
a) $f(x) = x - 3$

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$						



b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$						



6. Zbiór X jest zbiorem tych liczb naturalnych n , które spełniają nierówność $(n-1)^2 < (n-2)^2 + 15$. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie ze zbioru X resztę z jej dzielenia przez 2. Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli i wykresu.

3.2. Wykres funkcji liniowej (1)

Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**. Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej.

7. Uzupełnij tabelę. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych proste k , l , m i n .

$k: y = x$

x	0	1
y	0	1

$m: y = -x$

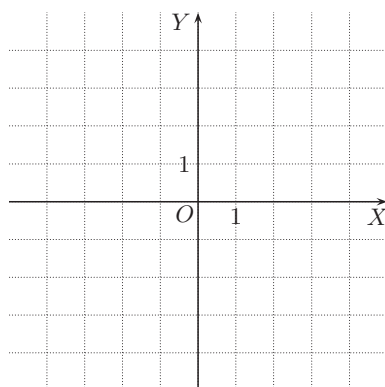
x	0	1
y		

$l: y = x + 3$

x	0	1
y		

$n: y = -x + 3$

x	0	1
y		



8. Cztery z poniższych równań opisują narysowane obok proste. Podpisz te proste. Naszkicuj prostą opisaną piątym równaniem.

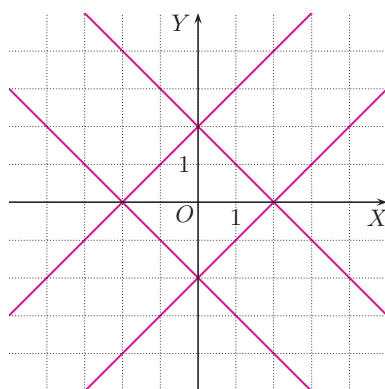
$l_1: y = -x + 2$

$l_3: y = -x + 1$

$l_4: y = x + 2$

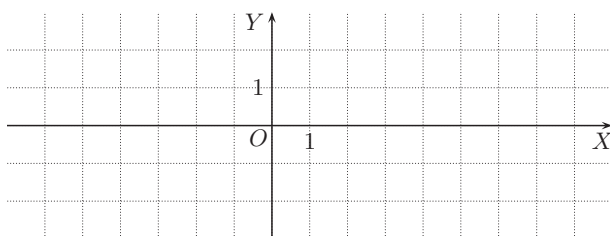
$l_2: y = -x - 2$

$l_5: y = x - 2$



9. Uzupełnij tabelę wartości funkcji: $f(x) = -\frac{1}{4}x$, $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$, $h(x) = -\frac{1}{4}x - 1$ dla podanych argumentów. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych proste przechodzące przez wyznaczone punkty.

x	-4	0	4
$f(x)$			
$g(x)$			
$h(x)$			



3.3. Wykres funkcji liniowej (2)

10. Wskaż pary prostych równoległych.

$$l_1: y = 5x + 2$$

$$l_3: y = 1,5x + 2$$

$$l_2: y = 2x - 4$$

$$l_4: y = 5x - 11$$

$$l_5: y = \frac{3}{2}x - 4$$

$$l_6: y = \frac{3}{2} + 2x$$

Proste $y = ax + b$ i $y = a_1x + b_1$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = a_1$.

11. Wskaż pary prostych przecinających oś OY w tym samym punkcie.

$$l_1: y = -3x + 0,25$$

$$l_3: y = 2x - 3$$

$$l_5: y = 4 - \pi x$$

$$l_2: y = -3x + 4$$

$$l_4: y = -3$$

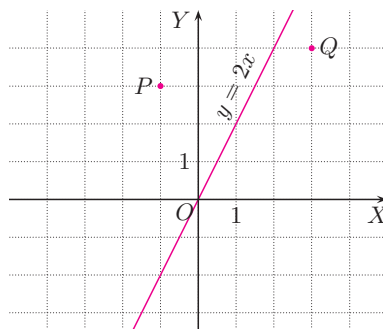
$$l_6: y = -2x + \frac{1}{4}$$

Prosta $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

12. Napisz wzory funkcji, których wykresami są proste równoległe do prostej $y = 2x$ i przechodzące przez punkty P i Q . Naszkicuj te proste.

Punkt P _____

Punkt Q _____



13. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do podanej prostej i przechodząca przez punkt P .

a) $y = 3x - 1$, $P(2, 4)$

c) $y = \frac{3}{4}x - 2$, $P(-4, 2)$

b) $y = -2x + 7$, $P(3, -1)$

d) $y = -0,8x + 9$, $P(-5, -2)$

14. a) Napisz równania prostych, w których zawierają się boki czworokąta $ABCD$, jeśli wiadomo, że są one równoległe do boków czworokąta $A_1B_1C_1D_1$.

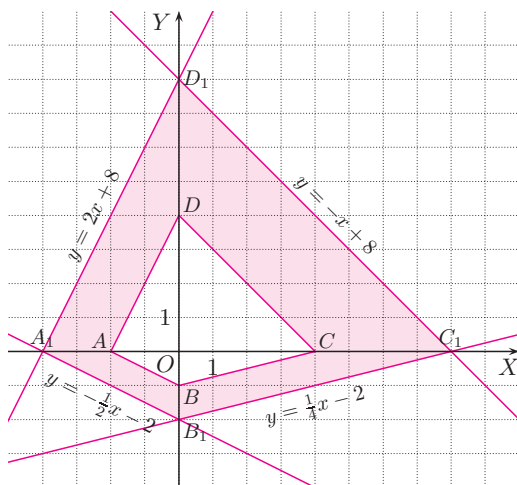
Prosta AB : _____

Prosta BC : _____

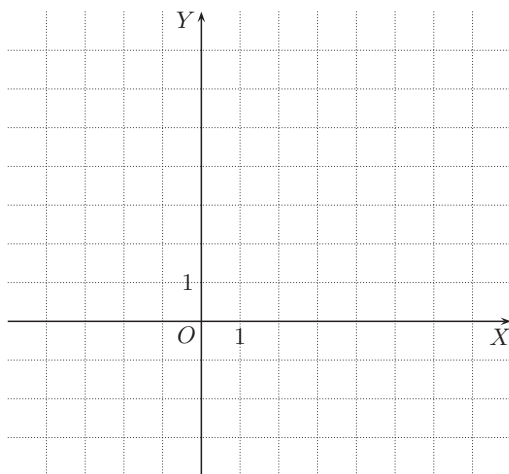
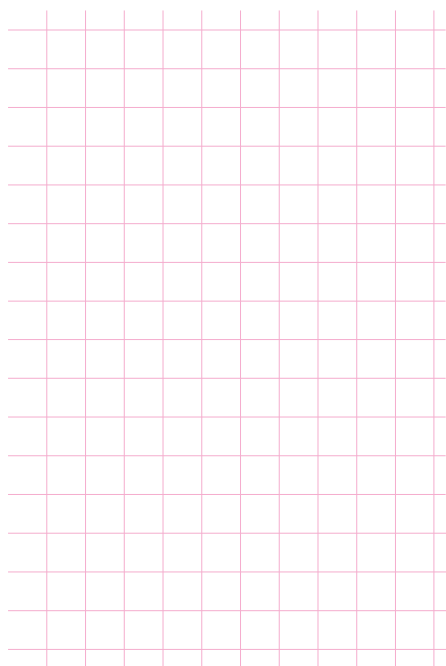
Prosta CD : _____

Prosta AD : _____

b) Oblicz pole zacieniowanego obszaru: _____



15. Punkty $(4, 0)$ i $(0, 3)$ są wierzchołkami równoległoboku, którego dwa boki zawierają się w prostych $y = 3x + 3$ i $y = \frac{1}{2}x - 2$. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się jego dwa pozostałe boki. Narysuj ten równoległobok i oblicz jego pole.



3.4. Własności funkcji liniowej

16. W ramce pokazano, jak wyznaczyć punkt przecięcia prostej $y = 3x + 4$ z osią OX . Postępując analogicznie, wyznacz punkt przecięcia podanej prostej z osią OX .

a) $y = -6x + 9$

b) $y = \frac{2}{3}x + 6$

Przykład

$$y = 3x + 4$$

Dla $y = 0$ mamy:

$$0 = 3x + 4$$

$$-3x = 4 \quad / : (-3)$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

17. Wyznacz miejsce zerowe funkcji f . Podaj współrzędne punktów przecięcia jej wykresu z osiami układu współrzędnych. Naskicuj ten wykres.

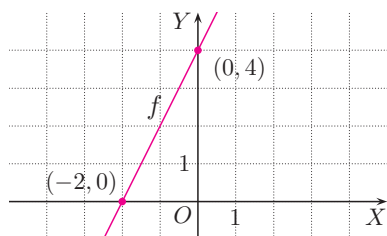
Jeśli $a \neq 0$, to funkcja $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $x = -\frac{b}{a}$.

a) $f(x) = 2x + 4$

miejsce zerowe: $x = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2$

punkt przecięcia z osią OX : $(-2, 0)$

punkt przecięcia z osią OY : $(0, 4)$

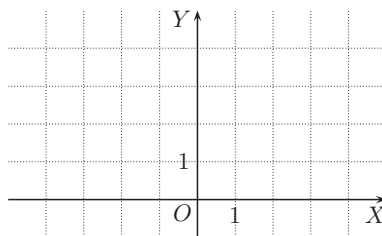


c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

miejsce zerowe: _____

punkt przecięcia z osią OX : _____

punkt przecięcia z osią OY : _____

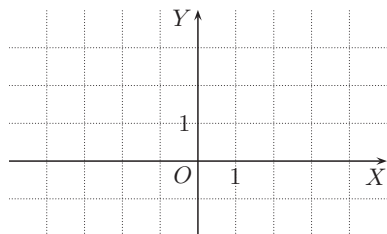


b) $f(x) = -3x + 3$

miejsce zerowe: _____

punkt przecięcia z osią OX : _____

punkt przecięcia z osią OY : _____

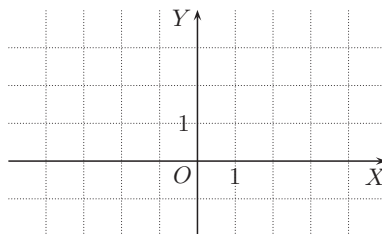


d) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$

miejsce zerowe: _____

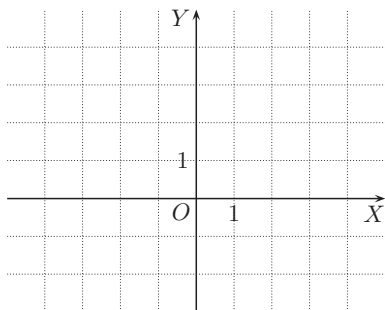
punkt przecięcia z osią OX : _____

punkt przecięcia z osią OY : _____



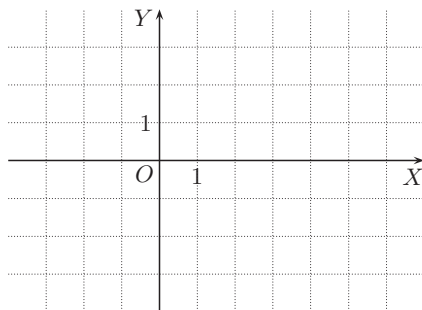
18. Naskicuj prostą o podanym równaniu. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i tą prostą.

a) $y = 2x + 4$



Pole trójkąta: _____

b) $y = \frac{1}{3}x - 2$



Pole trójkąta: _____

19. Naskicuj proste l i k . Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi oraz osią OY .

a) $l : y = 2x - 4,$

b) $l : y = \frac{2}{3}x + 4,$

c) $l : y = \frac{1}{2}x + 2,$

$k : y = -x + 2$

$k : y = -\frac{2}{3}x - 4$

$k : y = -\frac{5}{4}x - 5$

20. Określ monotoniczność funkcji f .

a) $f(x) = 0,003x - 8$ _____

b) $f(x) = -\frac{13}{11}x + 4$ malejąca

c) $f(x) = (3,14 - \pi)x$ _____

d) $f(x) = -7$ _____

e) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}-3}x - \frac{1}{3}$ _____

f) $f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x - 2$ _____

Funkcja $f(x) = ax + b$ jest:

- rosnąca, gdy $a > 0$,
- stała, gdy $a = 0$,
- malejąca, gdy $a < 0$.

21. Określ monotoniczność funkcji $f(x) = (4 - 2m)x - 7$, jeśli:

a) $m = \frac{13}{6},$

b) $m = 1,(9),$

c) $m = \sqrt{3},$

d) $m = 3(\sqrt{3} - 1).$

22. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od wartości parametru m .

a) $f(x) = (m + 3)x - 7$

c) $f(x) = \left(5 - \frac{2}{3}m\right)x + 1$

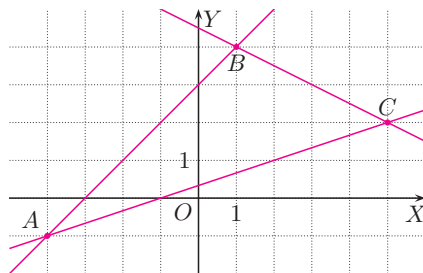
b) $f(x) = (2 - m)x + 4$

d) $f(x) = |m|x - 3$

3.5. Równanie prostej na płaszczyźnie

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

23. Dane są punkty: $A(-4, -1)$, $B(1, 4)$, $C(5, 2)$. Zapisz układ równań pozwalający wyznaczyć współczynniki a i b równania kierunkowego podanej prostej.



a) prosta AB :

$$\begin{cases} -1 = a \cdot (-4) + b \\ 4 = a \cdot 1 + b \end{cases}$$

b) prosta AC :

$$\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

c) prosta BC :

$$\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

24. Zapisz układ równań pozwalający wyznaczyć współczynniki a i b równania kierunkowego prostej przechodzącej przez punkty P i Q . Rozwiąż ten układ i zapisz równanie prostej PQ .

a) $P(2, 1)$, $Q(5, 4)$

b) $P(-1, -3)$, $Q(2, 3)$

c) $P(-2, 2)$, $Q(4, -1)$

25. Wyznacz równanie prostej PQ . Sprawdź, czy należy do niej punkt C .

a) $P(-2, 1)$, $Q(2, 5)$, $C(4, 8)$

b) $P(-1, 7)$, $Q(3, -1)$, $C(-2, 9)$

26. Naskicuj proste o podanych równaniach.

$$l_1: y = 3$$

$$l_4: x = -5$$

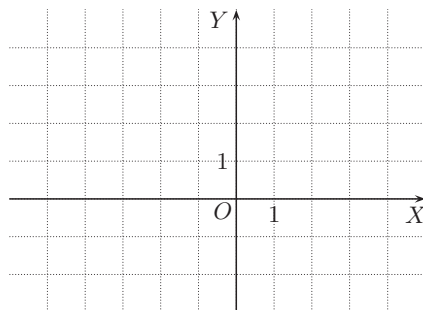
$$l_2: y = -2$$

$$l_5: y = 0$$

$$l_3: x = 4$$

$$l_6: x = 0$$

Które z tych prostych nie są wykresami funkcji?



27. Zapisz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .

a) $P(4, \frac{1}{2})$, $Q(-7, \frac{1}{2})$

b) $P(-6, 2)$, $Q(-6, -12)$

c) $P(\frac{7}{4}, \frac{12}{5})$, $Q(1\frac{3}{4}, 2\frac{3}{5})$

28. Oblicz pole prostokąta ograniczonego prostymi: $x = -1$, $x = 5$, $y = 4\frac{1}{2}$ i $y = 6\frac{1}{4}$.

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

29. Przekształć równanie ogólne prostej do postaci kierunkowej.

a) $3x - y - 4 = 0$

b) $-4x + 2y + 5 = 0$

c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 3 = 0$

$-y = -3x + 4 \quad / \cdot (-1)$

$y = 3x - 4$

30. Przekształć równania ogólne prostych do postaci kierunkowych. Zaznacz równania opisujące tę samą prostą.

$l_1: x - 2y + 2 = 0$

$l_3: -\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$

$l_5: \frac{2}{3}x - y + 2 = 0$

$l_2: -2x + 3y - 6 = 0$

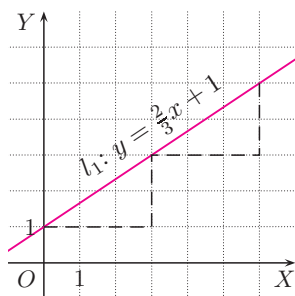
$l_4: 3x + 2y - 6 = 0$

$l_6: -3x + 6y - 6 = 0$

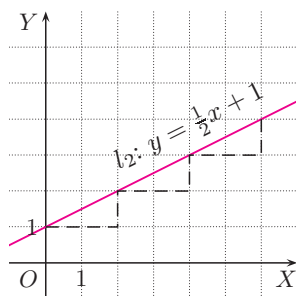
3.6. Współczynnik kierunkowy prostej

31. Dopasuj każdą z przedstawionych prostych do odpowiedniego opisu.

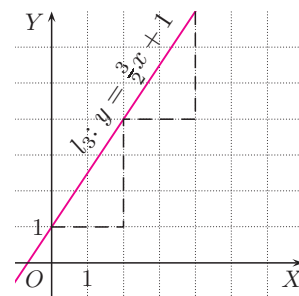
A.



B.

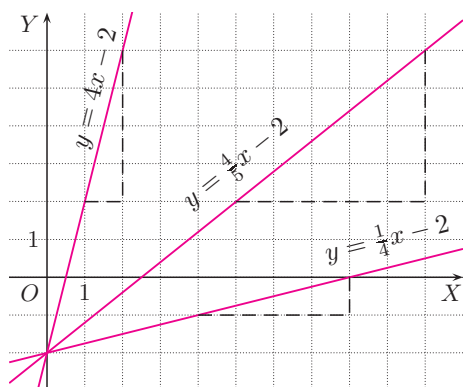


C.



Przyrostowi argumentu x o dwie jednostki odpowiada przyrost wartości funkcji o jedną jednostkę.	
Przyrostowi argumentu x o dwie jednostki odpowiada przyrost wartości funkcji o trzy jednostki.	
Przyrostowi argumentu x o trzy jednostki odpowiada przyrost wartości funkcji o dwie jednostki.	

32. Dla każdej z podanych prostych określ zależność między przyrostem argumentu x a odpowiadającym mu przyrostem wartości funkcji.



$y = 4x - 2$: _____

$y = \frac{1}{5}x - 2$: _____

$y = \frac{1}{4}x - 2$: _____

33. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty P i Q .

a) $P(3, 2), Q(5, 6)$

$a = \frac{6-2}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$

b) $P(1, 3), Q(4, 2)$

c) $P(2, -1), Q(-4, 3)$

d) $P(-7, \frac{1}{2}), Q(-5, \frac{1}{4})$

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez dwa różne punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) jest równy:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

34. Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty E i F .

a) $E(-1, 2), F(2, 8)$

c) $E(-2, 2), F(-6, 0)$

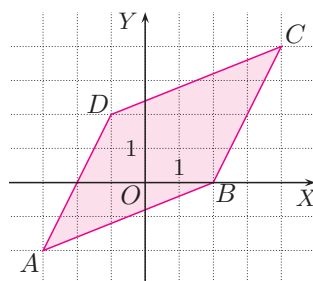
b) $E(3, -4), F(-6, -1)$

d) $E(-6, 2), F(3, -4)$

35. Odczytaj współrzędne wierzchołków równoległoboku przedstawionego na rysunku. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych zawierających:

a) boki równoległoboku,

b) przekątne równoległoboku.



36. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej l .

a) $l: y = 4x + 2, P(1, 3)$

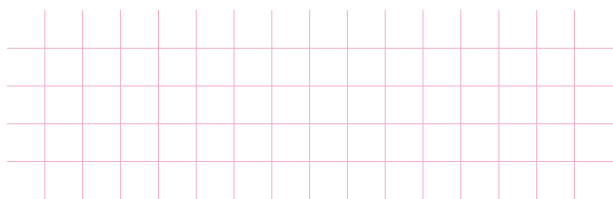
c) $l: y = 0,125x - 0,25, P(-16, -3)$

b) $l: y = -\frac{1}{5}x + 2, P(20, 9)$

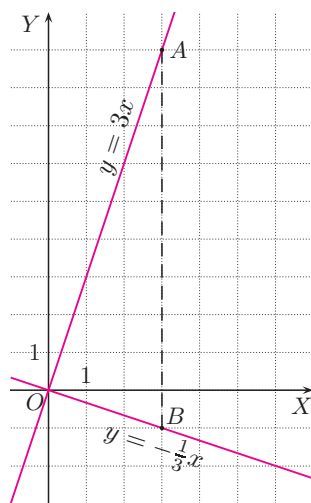
d) $l: y = 7, P(3, -4)$

3.7. Warunek prostopadłości prostych

37. a) Sprawdź, korzystając z rysunku, czy $|OA| = 3\sqrt{10}$, $|OB| = \sqrt{10}$, $|AB| = 10$.



b) Wykaż, że $\triangle AOB$ jest prostokątny.



38. Podaj współczynnik kierunkowy prostej $y = a_1x - 3$ prostopadłej do prostej k .

Proste $y = ax + b$ ($a \neq 0$) i $y = a_1x + b_1$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = -\frac{1}{a}$

a) $k: y = -7x + 7$ _____

c) $k: y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$ _____

b) $k: y = \frac{5}{6}x + 1$ _____

d) $k: y = -\frac{7}{9}x - \frac{1}{9}$ _____

39. Prosta l przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do prostej k . Wyznacz równanie prostej l .

a) $k: y = 2x - 7$, $P(0, 5)$ _____

b) $k: y = -6x + 3$, $P(0, -\frac{1}{4})$ _____

40. Zaznacz proste prostopadłe do prostej $y = -1,5x + 6$.


$k: y = -3 + \frac{4}{6}x$

$l: 3y - 2x - 1 = 0$

$m: -6y + 4x - 3 = 0$

$n: -3x + 2y + 6 = 0$

$o: 3y + 2x + 6 = 0$

 41. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej l .

a) $l: y = 2x + 7$, $A(3, -1)$

c) $l: y = -\frac{2}{5}x + 3$, $A(-3, -\frac{1}{2})$

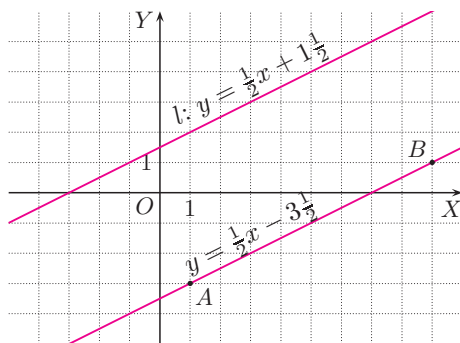
b) $l: y = -6x + 1$, $A(12, 7)$

d) $l: y = 1,5x - \sqrt{3}$, $A(6, -5)$

42. Punkty $A(1, -3)$ i $B(9, 1)$ są sąsiednimi wierzchołkami prostokąta. Wierzchołki C i D tego prostokąta należą do prostej l .

a) Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki BC i AD tego prostokąta.

b) Naskicuj te proste. Odczytaj współrzędne wierzchołków C i D oraz oblicz pole tego prostokąta.



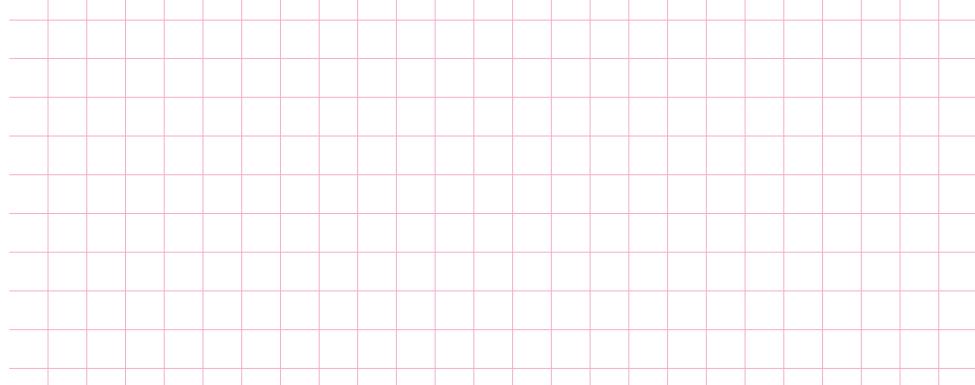
3.8. Układy równań liniowych (1)

43. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 8 \\ 4x - (-2x + 8) = 10 \end{cases}$$



44. Zapisz i rozwiąż metodą podstawiania układ równań dotyczący liczb x i y .

a) Suma liczb x i y jest równa 4, a różnica połowy liczby x i połowy liczby y jest równa 10.

b) Różnica liczb x i y jest równa 3, a suma podwojonej liczby x i potrojonej liczby y jest równa 11.

 45. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y = -3 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

3.9. Układy równań liniowych (2)

46. Przeanalizuj przykład, a następnie rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

Przykład

$$\begin{cases} 3x - y = -10 & / \cdot 2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 2y = -20 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$7x = -14$$

Otrzymujemy $x = -2$ i podstawiamy do równania $x + 2y = 6$.

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 3x + 5y = -11 \end{cases}$$

47. Wpisz liczby, przez które należy pomnożyć równania, aby skorzystać z metody przeciwnych współczynników.

$$a) \begin{cases} 3x - 6y = 4 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases} / \cdot \square$$

$$c) \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 7x + 3y = 9 \end{cases} / \cdot \square$$

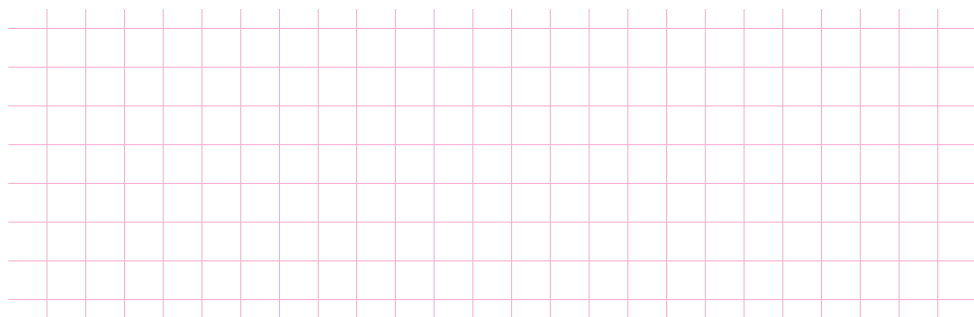
$$b) \begin{cases} 5x - \frac{3}{4}y = 6 \\ 4x - 6y = 7 \end{cases} / \cdot \square$$

$$d) \begin{cases} 12x - \frac{3}{4}y = -3 \\ 8x + \frac{5}{6}y = 7 \end{cases} / \cdot \square$$

48. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

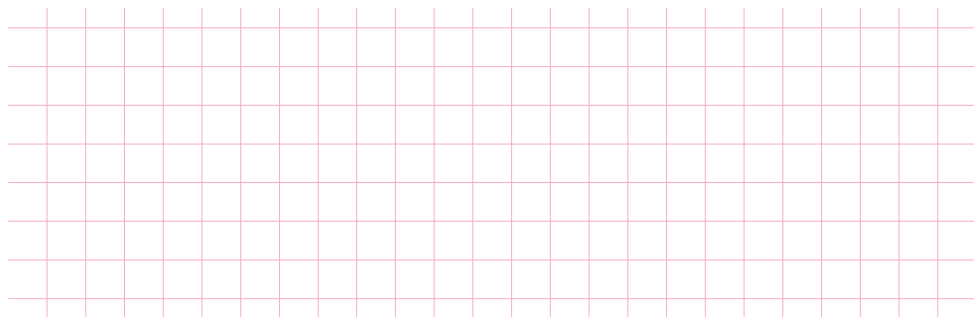
$$a) \begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + \frac{1}{2}y = 1 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$$



$$b) \begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 8,6 \end{cases}$$



49. Wskaż układy sprzeczne.

$$A: \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$E: \begin{cases} -x + 3y = 2 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases}$$

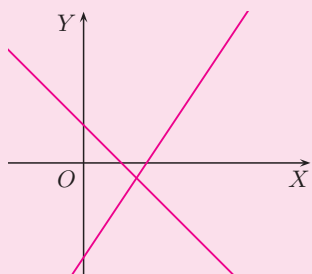
$$B: \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases}$$

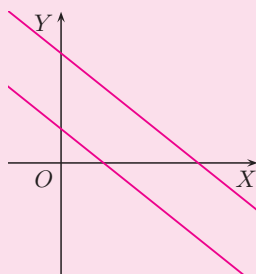
$$F: \begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

3.10. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

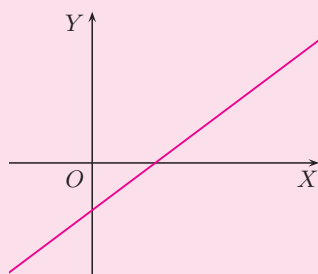
Każde z równań układu równań liniowych opisuje prostą. Położenie dwóch prostych na płaszczyźnie może być następujące:



Proste przecinają się w jednym punkcie – układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli jest **oznaczony**.



Proste są równoległe i różne – układ nie ma rozwiązań, czyli jest **sprzeczny**.



Proste pokrywają się – układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, czyli jest **nieoznaczony**.

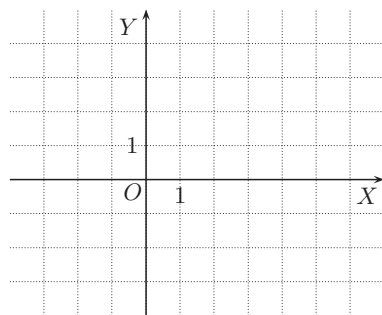
50. Rozwiąż graficznie układ równań.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

Przekształć równania do postaci kierunkowej.
Uzupełnij tabelę i naszkicuj proste.

$$\begin{cases} y = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

x		
y		
x		
y		



Odczytaj współrzędne punktu przecięcia prostych.

$$\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

51. Boki trójkąta są zawarte w prostych:

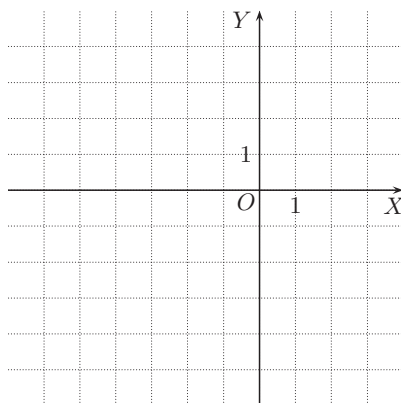
$$l_1: 2x + y = 4, l_2: x - y = -1, l_3: x - 3y = 9.$$

Naszkicuj te proste i odczytaj współrzędne wierzchołków trójkąta.

$$l_1: \underline{\hspace{2cm}} \quad l_2: \underline{\hspace{2cm}} \quad l_3: \underline{\hspace{2cm}}$$

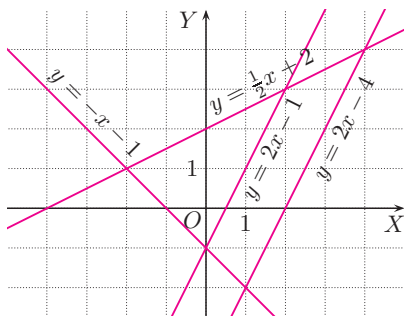
x			x			x		
y			y			y		

Wierzchołki: $\underline{\hspace{2cm}}$



52. Odczytaj z rysunku rozwiązanie danego układu równań. Podstaw współrzędne otrzymanego punktu do układu i sprawdź, czy jest to jego rozwiązanie.

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$



53. Przekształć równania układu do postaci kierunkowej. Korzystając z rysunku, odpowiedz, czy układ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Jeśli istnieje rozwiązanie układu, podaj je.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = -1 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -2x + y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

{ _____

{ _____

{ _____

{ _____

{ _____

{ _____

 54. Rozwiąż graficznie układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} -3x + y = -5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

 55. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$$

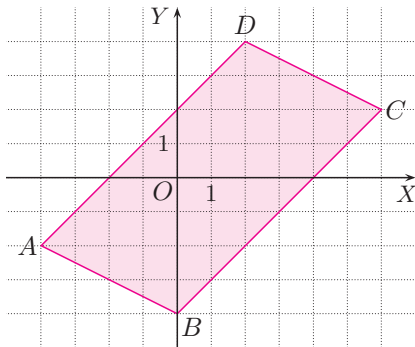
$$\text{b) } \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$


$$\text{c) } \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

56. Punkty A, B, C, D są wierzchołkami równoległoboku (rysunek obok). Zapisz równania prostych:

a) AD i BC , b) AB i AD .

Czy utworzony układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny?



 **57.** Sprawdź rachunkowo, czy przekątne równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) przecinają się w punkcie $(1, 0)$.

3.11. Funkcja liniowa – zastosowania

58. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach „Wagabunda” i „Szprycha”.

WYPOŻYCZALNIA „WAGABUNDA”

- Rower górski
10 zł + 2 zł za każdą godzinę
- Rower dziecięcy
6 zł + 2 zł za każdą godzinę

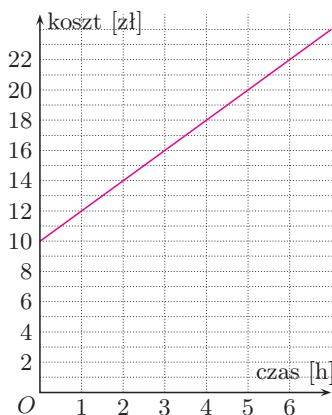
WYPOŻYCZALNIA „SZPRYCHA”

- Rower górski
6 zł + 3 zł za każdą godzinę
- Rower dziecięcy
2 zł + 3 zł za każdą godzinę

Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczenia roweru górskiego w wypożyczalni „Wagabunda” w zależności od czasu.

a) Naskicuj w tym samym układzie współrzędnych analogiczny wykres dla wypożyczalni „Szprycha”.

b) Odczytaj z otrzymanych wykresów, przy jakiej liczbie godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru z wypożyczalni „Wagabunda”, a przy jakiej z wypożyczalni „Szprycha”.



59. Chcemy wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Naskicuj wykres pokazujący zależność kosztu od czasu wypożyczenia, jeśli korzystamy z wypożyczalni (patrz ćwiczenie 59):

a) „Wagabunda”, b) „Szprycha”.

Odczytaj z otrzymanych wykresów, przy jakiej liczbie godzin korzystniejsza jest oferta wypożyczalni „Wagabunda”.

60. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta C o tej samej godzinie. Piotr startuje z miasta B i jedzie ze stałą szybkością 15 km/h, a Stefan z miasta A i jedzie ze stałą szybkością 22,5 km/h.



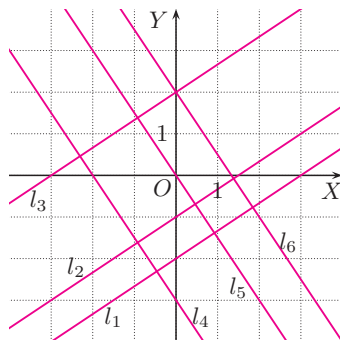
a) Naskicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta C w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta C w zależności od czasu.

b) Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?

c) O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią szybkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście C ?

Zestaw powtórzeniowy I

61. Prosta l_1 określona jest równaniem $y = \frac{2}{3}x - 2$. Podaj równania pozostałych prostych, jeśli proste l_2 i l_3 są równoległe do prostej l_1 , a proste l_4 , l_5 i l_6 są do niej prostopadłe (patrz rysunek).



62. Dane są proste $k: y = 2x + 6$ i $l: y = -2x - 2$. Naszkicuj proste k i l oraz proste k_1 i l_1 będące obrazami odpowiednio prostych k i l w symetrii względem osi OY .

a) Podaj równania prostych k_1 i l_1 .

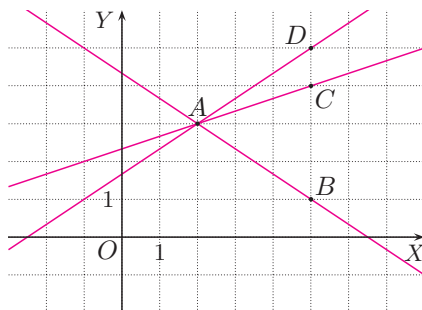
b) Oblicz pole i obwód figury ograniczonej prostymi k , l , k_1 i l_1 .

63. Dane są punkty: $A(2, 3)$, $B(5, 1)$, $C(5, 4)$ i $D(5, 5)$ (rysunek obok).

a) Wyznacz współczynniki kierunkowe prostych AB , AC i AD .

b) Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i prostą AB .

c) Dla jakich argumentów funkcja, której wykresem jest prosta AC , przyjmuje wartości ujemne?



64. a) Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki trójkąta o wierzchołkach: $A(-3, 2)$, $B(1, -6)$, $C(9, 6)$.

b) Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki trapezu o wierzchołkach: $A(-2, -3)$, $B(6, 3)$, $C(-1, 4)$, $D(-5, 1)$. Czy jest to trapez prostokątny?

65. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

a)
$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + y = -3 \\ 2x - 3y = -2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 3y = -10 \end{cases}$$

66. Rozwiąż algebraicznie układ równań.

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -4,6 \\ 3x + 5y = -5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x - y - 2}{2} - \frac{x + y}{4} = 1 \\ \frac{2x + y - 1}{3} - \frac{x + y}{2} = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{y + 6}{3} + \frac{x}{4} = 5 - 2x \\ \frac{2y - 3x}{4} = \frac{2}{3}y - 1 \end{cases}$$

67. Boki trójkąta są zawarte w prostych: $4x - 3y + 6 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$ oraz $7x + y - 27 = 0$. Uzasadnij, że trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków.

Zestaw powtórzeniowy II

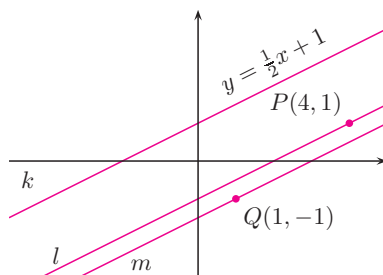
68. Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli przyjmuje ona wartości:

- a) ujemne tylko dla $x \in (4; \infty)$, a prosta będąca jej wykresem jest prostopadła do prostej $y = 3x + 6$,
- b) nieujemne tylko dla $x \leq -6$, a prosta będąca jej wykresem jest równoległa do prostej $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 3 = 0$.

69. Podaj wzór funkcji liniowej, jeśli prosta będąca jej wykresem:

- a) przecina osie układu współrzędnych w punktach $(0, -7)$ i $(\frac{7}{3}, 0)$,
- b) przechodzi przez punkt $(-3, 2\frac{1}{4})$ i nie przecina osi OX ,
- c) przecina oś OX w punkcie $(-3, 0)$ i wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu 6,
- * d) ma współczynnik kierunkowy równy 2 i wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu 4.

70. Proste k , l i m są równoległe. Zaznacz litery umieszczone w tabeli nad współrzędnymi punktów należących do jednej z prostych k , l , m , a otrzymasz nazwisko wybitnego matematyka francuskiego, współtwórcy podstaw współczesnej algebry. Matematyk ten zginął w pojedynku w 1832 r. Miał wtedy 21 lat.



G	E	A	L	M	N	O	I	R	S
$(8, 5)$	$(2, 3)$	$(-6, -4)$	$(-6, -2)$	$(4, 2)$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(7, 2)$	$(-9, -6)$	$(1, -2)$	$(-2, 0)$

71. Dane są liczby m_1 i m_2 . Dla każdej z nich sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = m \end{cases}$$

$m_1 = -10, m_2 = 0$

b)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ mx + 3y = 6 \end{cases}$$

$m_1 = 1, m_2 = \frac{9}{2}$

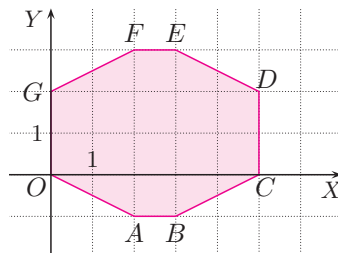
c)
$$\begin{cases} 3x + y = m \\ (m^2 - 1)x + y = 2 \end{cases}$$

$m_1 = -2, m_2 = 2$

72. a) Wyznacz równania prostych zawierających boki ośmiokąta $ABCDEFGO$.

b) Dla jakich wartości parametru m prosta $y = mx$ zawiera przekątną tego ośmiokąta?

c) Uzasadnij, że przekątne GC i AD nie są prostopadłe.



4. Funkcje

4.1. Dziedzina i miejsca zerowe funkcji

Określając dziedzinę funkcji danej wzorem, przyjmujemy, że jest ona zbiorem wszystkich argumentów, dla których ten wzór ma sens.

1. Określ dziedzinę funkcji f (zwróć uwagę na to, że mianownik nie może być równy 0).

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbf{R \setminus \{0\}}$ d) $f(x) = \frac{1}{2x-6}$ _____

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ _____ e) $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$ _____

c) $f(x) = \frac{x}{x+3}$ _____ f) $f(x) = \frac{x}{0,5x+2}$ _____

2. Określ dziedzinę funkcji f (zwróć uwagę na to, że pod pierwiastkiem nie może wystąpić liczba ujemna).

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $x-1 \geq 0$, skąd $x \geq 1$, czyli $D_f = [1; \infty)$ _____

b) $f(x) = \sqrt{x+5}$ _____

c) $f(x) = \sqrt{2-x}$ _____

d) $f(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{2}x}$ _____

3. Określ dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ $x-1 > 0$, skąd $x > 1$, czyli $D_f = (1; \infty)$ _____

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ _____

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$ _____

4. Określ dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-3}$ _____

b) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+2}$ _____

c) $f(x) = \frac{1}{x(x+4)}$ _____

d) $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)(x+6)}$ _____

5. Skreśl liczby nienależące do dziedziny funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - x}$, $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

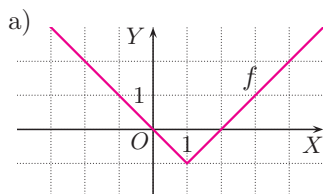
c) $f(x) = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$, $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

b) $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 + x}$, $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

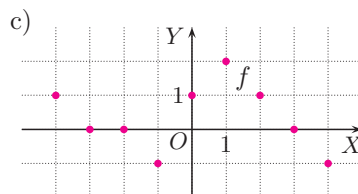
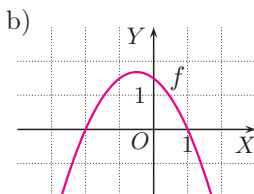
d) $f(x) = \frac{x^2}{(2x+1)^2}$, $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

Miejszem zerowym funkcji $y = f(x)$ nazywamy taką wartość argumentu x , dla której $f(x) = 0$.

6. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f .



$x = 0, x = 2$



7. Określ dziedzinę funkcji f i sprawdź, która z liczb: $-3, 3$ jest miejscem zerowym tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, miejsce zerowe: $x = 3$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x(x - 3)}$

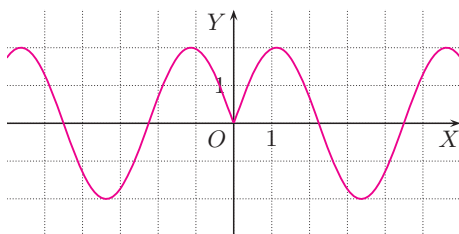
c) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x(x + 3)}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x + 3)(x - 3)}$

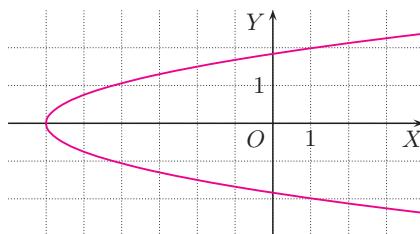
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji

8. Czy na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji?

a) _____



b) _____



9. a) Uzupełnij tabelę i naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < 2 \\ 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

Podkreśl te spośród podanych punktów, które należą do wykresu funkcji f .

$$P(-6, -5) \quad Q\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad R(11, 3)$$

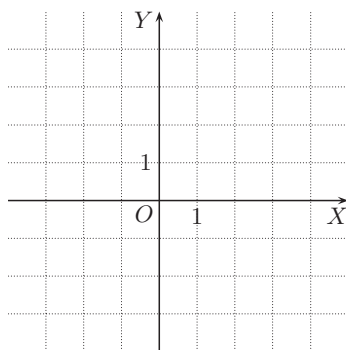
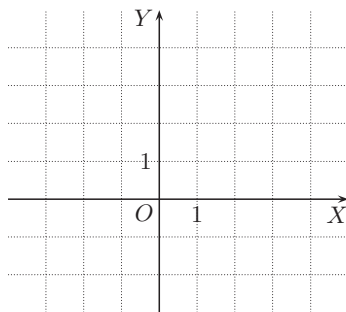
b) Uzupełnij tabelę i naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1 \\ -x+2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

Podkreśl te spośród podanych punktów, które należą do wykresu funkcji f .

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad Q(15, -13) \quad R\left(\frac{94}{7}, \frac{106}{7}\right)$$



10. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f .

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < -1 \\ x & \text{dla } -1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

11. a) Uzupełnij tabelę, korzystając z wykresu funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

x	-2	-1	0		2	3	4
$f(x)$			0	-1			8

b) Który z poniższych wzorów może być wzorem funkcji f ?

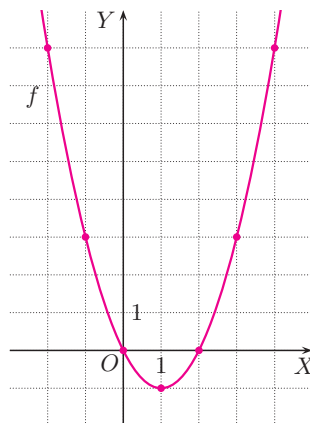
$$y = x^2 - 2$$

$$y = (x-2)^2$$

$$y = x^2$$

$$y = x^2 - 1$$

$$y = x^2 - 2x$$



12. Skreśl punkty, które nie należą do wykresu funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4$.

$$A(-2, 0)$$

$$B(-1, -5)$$

$$C(1, -3)$$

$$D\left(-\frac{1}{2}, -4\frac{1}{4}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{2}, -3\frac{3}{4}\right)$$

4.3. Monotoniczność funkcji

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

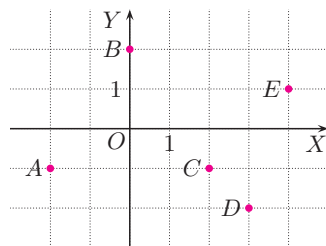
$$\text{jeżeli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

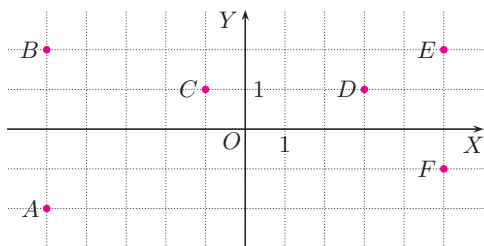
$$\text{jeżeli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$

13. a) Które pary punktów mogą należeć do wykresu funkcji rosnącej?

b) Które pary punktów mogą należeć do wykresu funkcji malejącej?



14. a) Naskicuj wykres funkcji niemalejącej $f: \langle -5; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ tak, aby należały do niego cztery spośród punktów A–F.



Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$

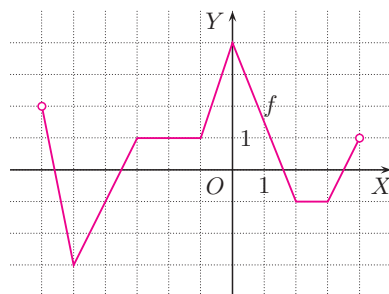
Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$

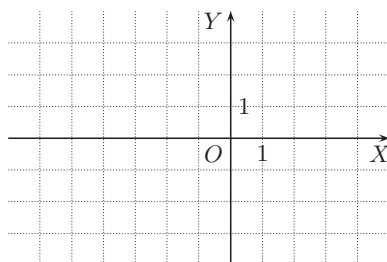
b) Czy można naskicować wykres funkcji nierosnącej $f: \langle -5; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ tak, aby należały do niego cztery spośród punktów A–F?

15. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-6; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Wskaż zdania prawdziwe.

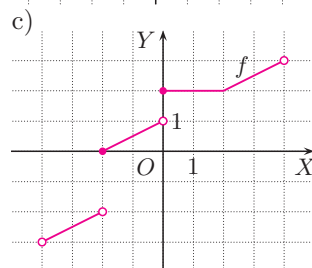
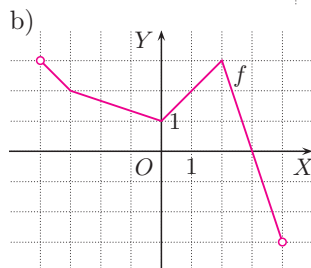
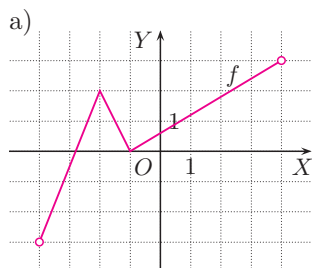
- ☐ A. f jest nierosnąca w przedziale $(0; 3)$.
- ☐ B. f jest nierosnąca w przedziale $(0; 4)$.
- ☐ C. f jest malejąca w przedziale $(0; 2)$.
- ☐ D. f jest niemalejąca w przedziale $(-5; -1)$.
- ☐ E. f jest niemalejąca w przedziale $(-5; 0)$.
- ☐ F. f jest rosnąca w przedziale $(-4; -2)$.



16. Naskicuj wykres funkcji $f: (-6; 4) \rightarrow \mathbf{R}$, która jest stała w przedziałach $(-6; -3)$ i $(0; 2)$, maleje w przedziale $(-3; 0)$ oraz rośnie w przedziale $(2; 4)$.



17. Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbf{R}$, korzystając z jej wykresu.

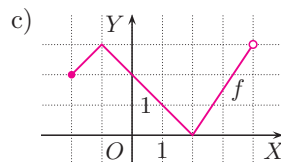
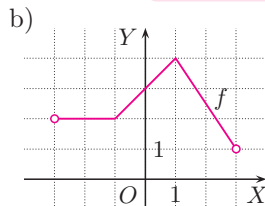
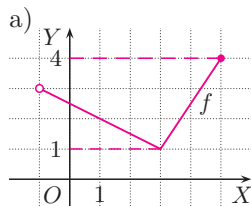


_____	_____	_____
_____	_____	_____
_____	_____	_____
_____	_____	_____

4.4. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

18. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę i zbiór wartości.

Zbiór wartości funkcji $f: X \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$.



_____	_____	_____
_____	_____	_____

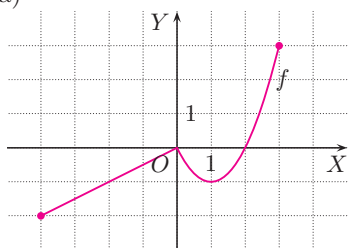
19. Naskicuj wykres dowolnej funkcji f , której dziedziną jest zbiór X , a zbiorem wartości zbiór Y .

a) $X = (-3; -2)$, $Y = \langle 1; 4 \rangle$

b) $X = \langle -2; 4 \rangle$, $Y = (-2; 4)$

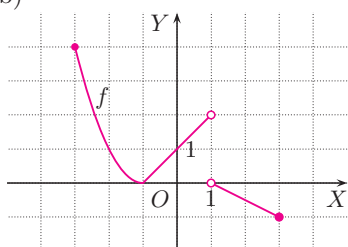
20. Uzupełnij poniższe informacje na podstawie wykresu funkcji f .

a)



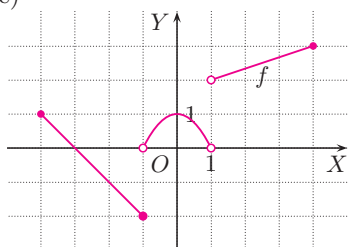
- dziedzina: _____
- zbiór wartości: _____
- miejsca zerowe: $x = 0$ oraz $x = 2$
- funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość _____ dla argumentu _____ oraz największą wartość _____ dla argumentu _____

b)



- dziedzina: _____
- zbiór wartości: _____
- miejsca zerowe: _____
- funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość _____ dla argumentu _____ oraz największą wartość _____ dla argumentu _____

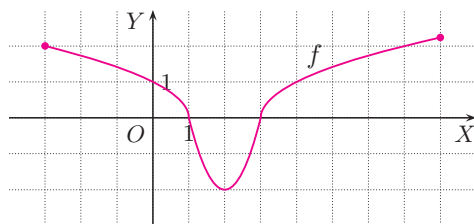
c)



- dziedzina: _____
- zbiór wartości: _____
- miejsca zerowe: _____
- funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość _____ dla argumentu _____ oraz największą wartość _____ dla argumentu _____

21. Dany jest wykres funkcji $f: \langle -3; 8 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Uzupełnij tabelę.

Przedział	Wartość	
	najmniejsza	największa
$\langle -3; 0 \rangle$		
$\langle 0; 8 \rangle$		
$\langle 2; 4 \rangle$	-2	



22. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f o podanej dziedzinie. Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f i jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = 2x - 3$, $D_f = \langle -1; 4 \rangle$

c) $f(x) = |x| - 1$, $D_f = \langle -3; 3 \rangle$

b) $f(x) = -x + 1$, $D_f = \langle -4; 3 \rangle$

d) $f(x) = |x| - 2$, $D_f = \langle -6; 6 \rangle$

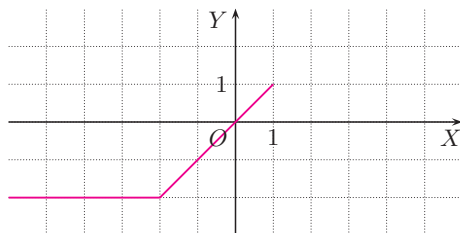
4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

23. Uzupełnij wykres funkcji f . Odczytaj z niego zbiór wartości tej funkcji i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 1$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x & \text{dla } x \in (-2; 1) \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$$

• zbiór wartości: _____

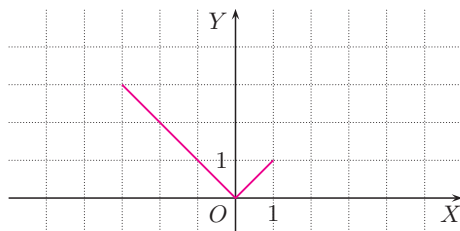
• $f(x) \leq 1$ dla _____



$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ |x| & \text{dla } x \in (-3; 1) \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$$

• zbiór wartości: _____

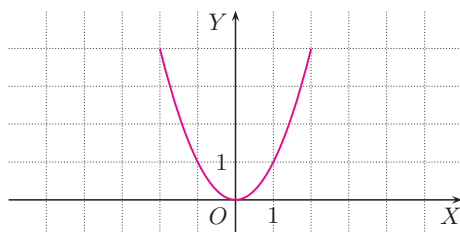
• $f(x) \leq 1$ dla _____



$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x^2 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$

• zbiór wartości: _____

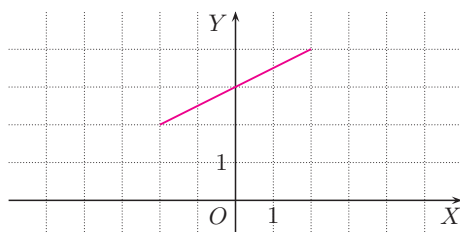
• $f(x) \leq 1$ dla _____



$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ -x + 6 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$

• zbiór wartości: _____

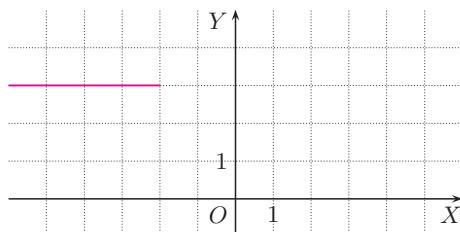
• $f(x) \leq 1$ dla _____



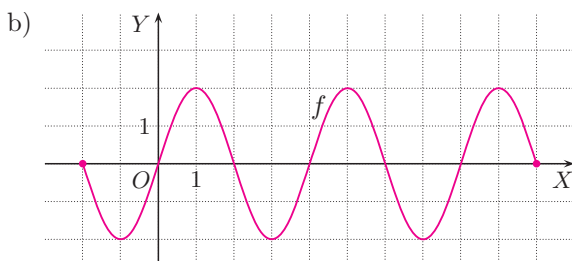
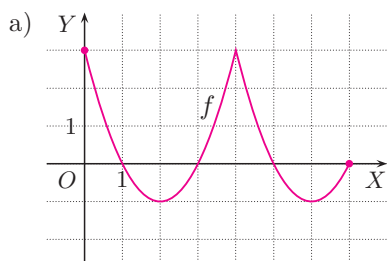
$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x + 1 & \text{dla } x \in (-2; 1) \\ x - 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$$

• zbiór wartości: _____

• $f(x) \leq 1$ dla _____



24. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 0$.



• dziedzina: _____

• dziedzina: _____

• $f(x) < 0$ dla _____

• $f(x) < 0$ dla _____

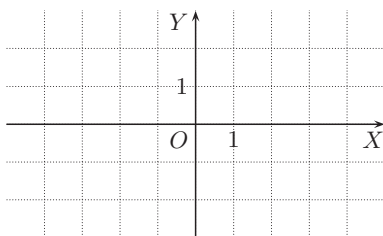
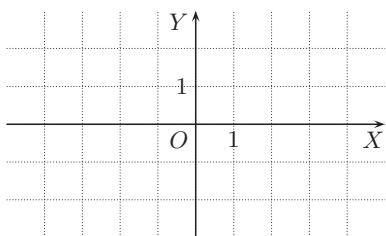
• $f(x) \geq 0$ dla _____

• $f(x) \geq 0$ dla _____

25. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = -1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq -1$.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x & \text{dla } x \in (-2; \infty) \end{cases}$

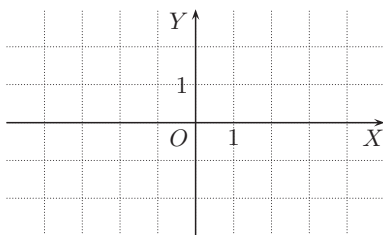
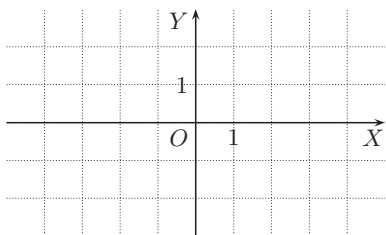


$f(x) = -1$ dla _____

$f(x) \geq -1$ dla _____

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ -1 & \text{dla } x \in (-3; \infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$



4.6. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

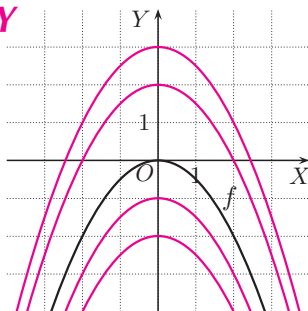
26. Na rysunku obok kolorem czarnym narysowano wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Podpisz pozostałe wykresy.

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$l(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$$

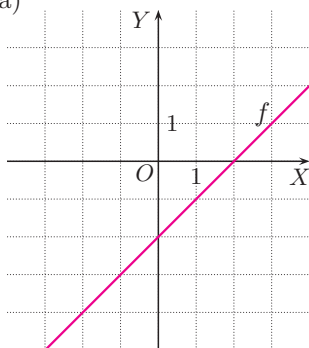
$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$$

$$k(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$$

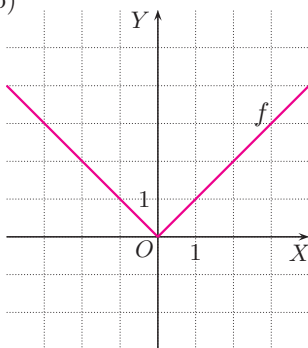


27. Naszkicuj na rysunku przedstawiającym wykres funkcji f wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 3$ i $h(x) = f(x) - 2$.

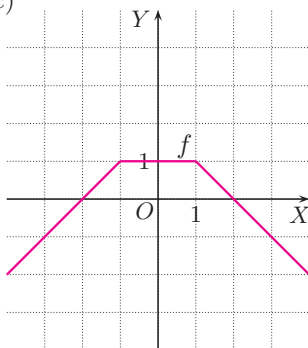
a)



b)



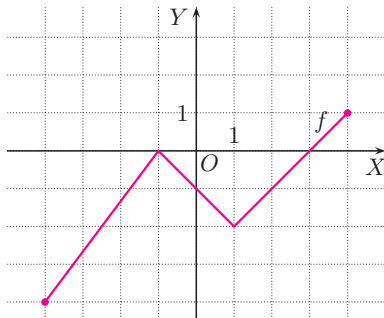
c)



28. Dany jest wykres funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) + 2$, a następnie odczytaj z niego:

a) miejsca zerowe funkcji g ,

b) zbiór argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości dodatnie.

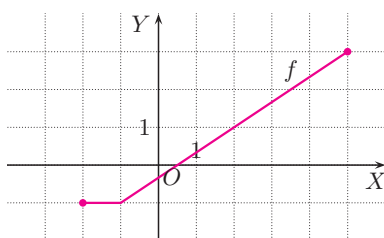


29. Dany jest wykres funkcji $f: \langle -2; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, której zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 3 \rangle$. Podaj zbiór wartości funkcji:

a) $g(x) = f(x) + 1$ _____

b) $h(x) = f(x) + 3$ _____

c) $k(x) = f(x) - 2$ _____

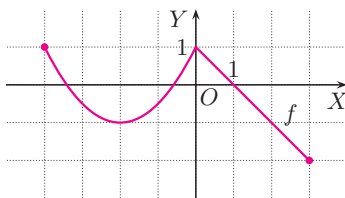


30. Dany jest wykres funkcji $f: \langle -4; 3 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Dla jakiej wartości parametru a punkt P należy do wykresu funkcji $y = f(x) + a$?

a) $P(0, 3)$ _____

b) $P(3, 1)$ _____

c) $P(-4, -2)$ _____

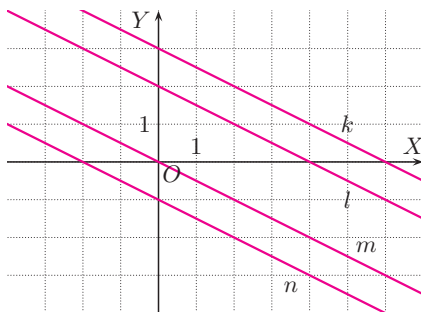


31. Przedstawione na rysunku proste k , l , m i n są równoległe. Prosta l jest wykresem funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Podaj wzory pozostałych prostych.

k : _____

m : _____

n : _____

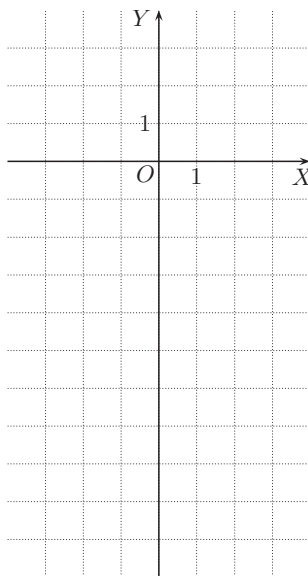



32. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2$. Stosując odpowiednie przesunięcia, naskicuj wykresy funkcji $g(x) = -x^2 + 3$ oraz $h(x) = -x^2 - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji f , g i h .

Zbiór wartości funkcji f : _____


Zbiór wartości funkcji g : _____

Zbiór wartości funkcji h : _____



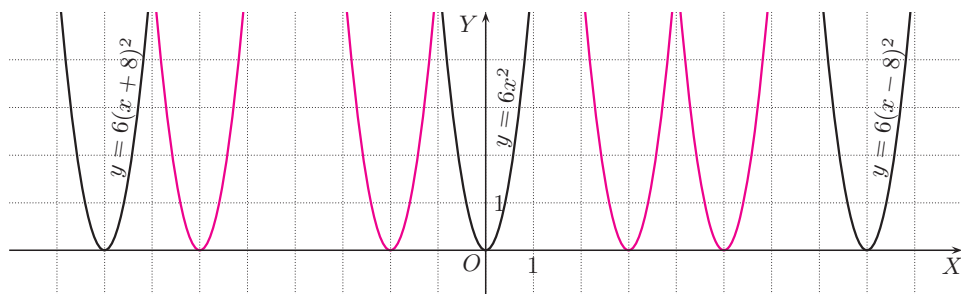
 **33.** a) Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |x|$. Dla jakiej wartości a miejscami zerowymi funkcji $g(x) = f(x) + a$ są liczby -3 i 3 ? Naskicuj wykres funkcji g .

b) Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$. Dla jakiej wartości a miejscami zerowymi funkcji $g(x) = f(x) + a$ są liczby -2 i 2 ? Naskicuj wykres funkcji g .

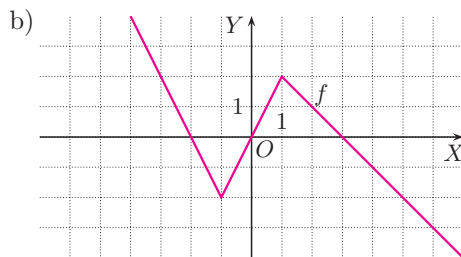
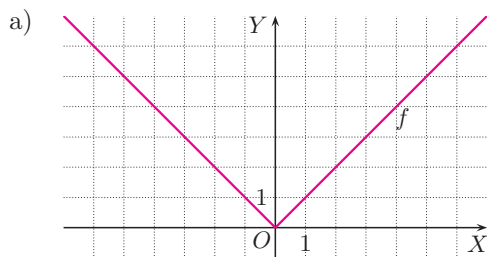
 **34.** Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |x| - 1$. Stosując odpowiednie przesunięcia, naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 1$ oraz $h(x) = f(x) - 4$. Podaj zbiory rozwiązań nierówności $g(x) \leq 0$ oraz $h(x) < 0$.

4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

35. Na rysunku przedstawiono wykresy siedmiu funkcji. Trzy z nich podpisano. Podpisz pozostałe cztery wykresy.



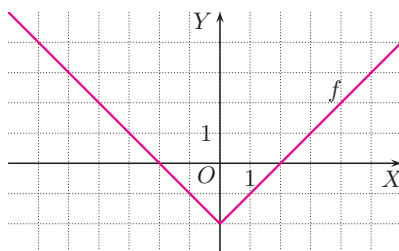
36. Naskicuj na rysunku przedstawiającym wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ wykresy funkcji $g(x) = f(x-2)$ i $h(x) = f(x+3)$.



37. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x-1)$ oraz $h(x) = f(x+2)$. Dla jakich argumentów x zachodzi podana nierówność?

a) $g(x) < 0$ _____

b) $h(x) \leq 0$ _____

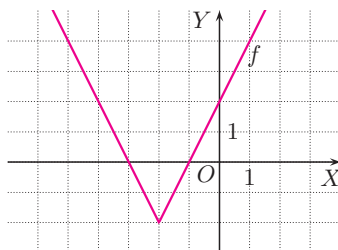


38. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Dla jakich argumentów x funkcja g przyjmuje wartości nieujemne?

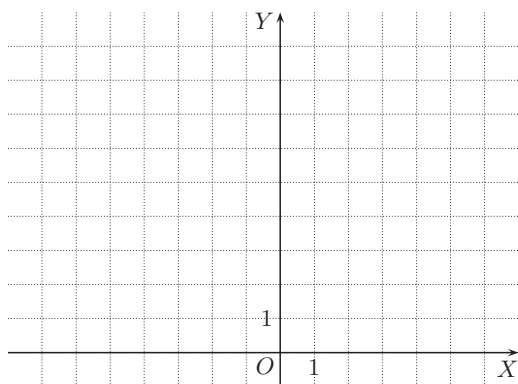
a) $g(x) = f(x-1)$ _____

b) $g(x) = f(x-14)$ _____

c) $g(x) = f(x+10)$ _____



39. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$. Stosując odpowiednie przesunięcia, naskicuj wykresy funkcji $g(x) = (x + 4)^2$ oraz $h(x) = (x - 3)^2$. Odczytaj z wykresów rozwiązania równań: $f(x) = 1$, $g(x) = 1$ oraz $h(x) = 1$.



$f(x) = 1$ dla $x = -1, x = 1$

$g(x) = 1$ dla

$h(x) = 1$ dla

40. Wykres funkcji g otrzymujemy przesuwając wykres funkcji $f(x) = x^2$ o p jednostek w prawo. Ile wynosi p , jeśli:

a) miejscem zerowym funkcji g jest liczba 7,

$p =$

b) równanie $g(x) = 1$ jest spełnione dla $x = 0$ i $x = 2$,

$p =$

c) równanie $g(x) = 4$ jest spełnione dla $x = -1$ i $x = 3$?

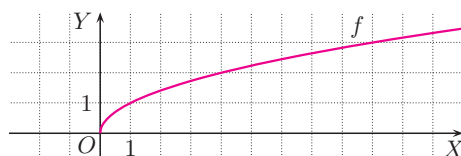
$p =$

41. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = \sqrt{x - 1}$ i $h(x) = \sqrt{x + 2}$.

a) Podaj dziedziny funkcji g i h .

$D_g =$

$D_h =$



b) Dla jakich x spełnione jest równanie $g(x) = 2$?

c) Dla jakich x zachodzi nierówność $h(x) \geq 3$?

42. Podaj wzór funkcji g , której wykres otrzymano z wykresu funkcji $f(x) = 5x^3$ przez przesunięcie:

a) o 3 jednostki w górę,

c) o 4 jednostki w prawo,

$g(x) = 5(x - 4)^3$

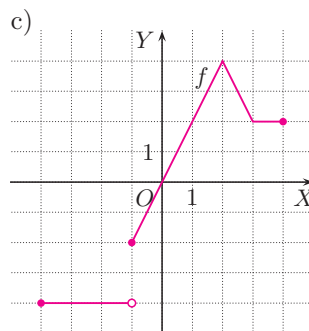
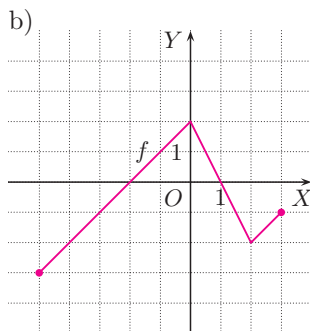
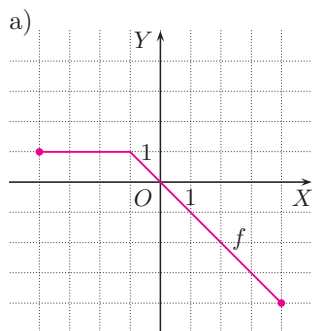
b) o 2 jednostki w dół,

d) o 1 jednostkę w lewo.

4.8. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX

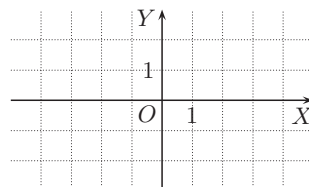
43. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Naskicuj na tym samym rysunku wykres funkcji $y = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i $-f$.

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy, odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi OX .

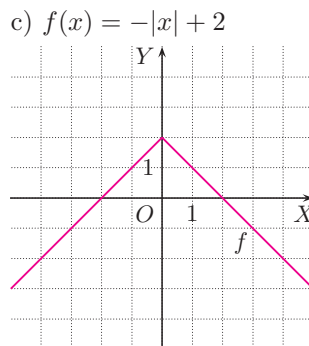
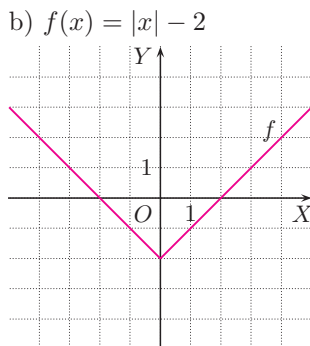
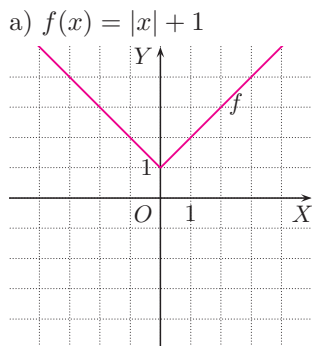


44. W układzie współrzędnych obok naskicuj wykres dowolnej funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest przedział $\langle -4; 4 \rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -1; 2 \rangle$ oraz wykres funkcji $g(x) = -f(x)$.

Podaj zbiór wartości funkcji g : _____.



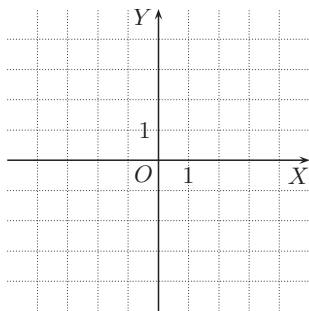
45. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x - 2)$ oraz $h(x) = -f(x - 2)$, mając dany wykres funkcji f . Podaj wzory funkcji g i h .



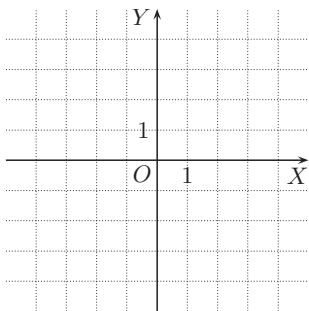
$g(x) = |x - 2| - 2$

46. Naskicuj kolejno wykresy funkcji: $y = f(x)$, $g(x) = f(x + 1)$, $h(x) = -g(x)$.
Podaj wzory funkcji g i h .

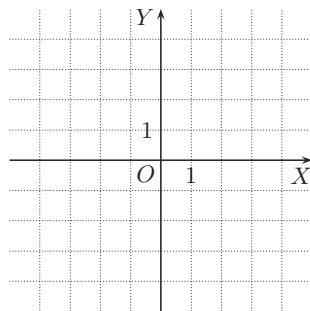
a) $f(x) = |x|$



b) $f(x) = |x| - 3$



c) $f(x) = -|x|$

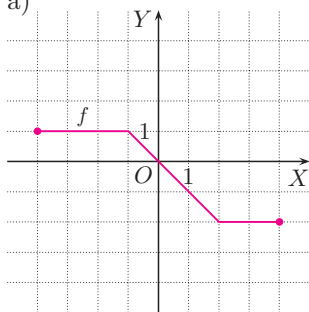


$g(x) = -|x + 1|$

$h(x) = |x + 1|$

47. Dany jest wykres funkcji f . W tym samym układzie współrzędnych naskicuj wykresy funkcji g i h . Podaj zbiory wartości funkcji g i h .

a)



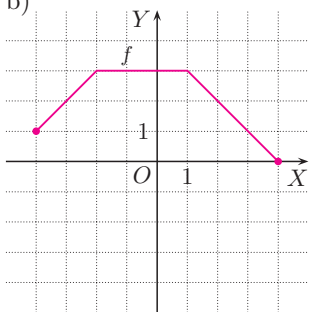
$g(x) = f(x) + 1$

zbiór wartości funkcji g :

$h(x) = -g(x)$

zbiór wartości funkcji h :

b)



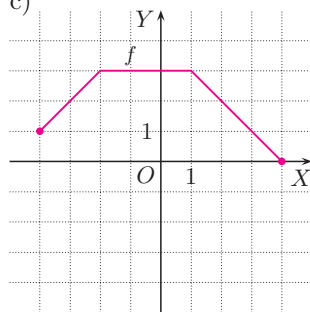
$g(x) = f(x) - 1$

zbiór wartości funkcji g :

$h(x) = -g(x)$

zbiór wartości funkcji h :

c)



$g(x) = -f(x)$

zbiór wartości funkcji g :

$h(x) = g(x) - 1$

zbiór wartości funkcji h :

48. Naskicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = -|x + 2|$

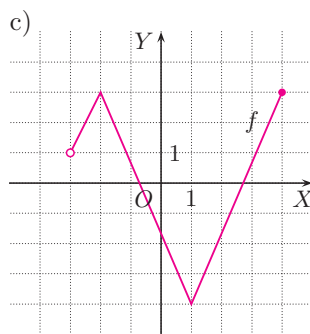
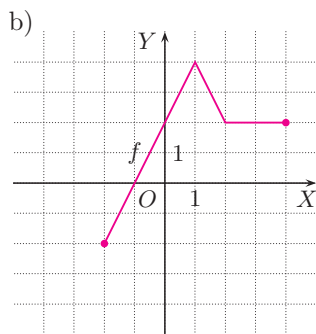
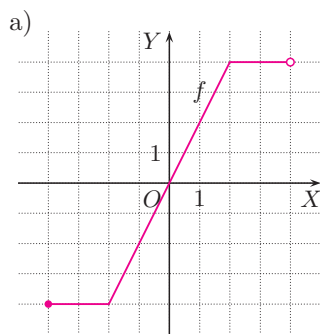
b) $f(x) = -|x - 1|$

c) $f(x) = -|x - 4| + 2$

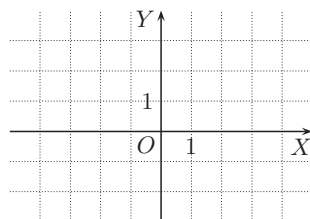
4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY

49. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Naskicuj na tym samym rysunku wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj dziedziny funkcji f i g .

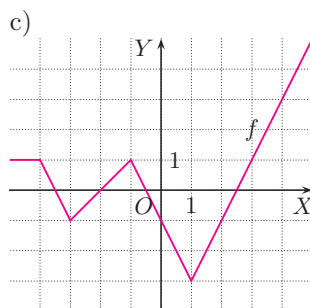
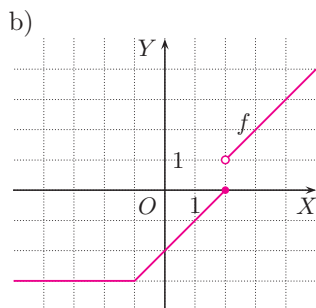
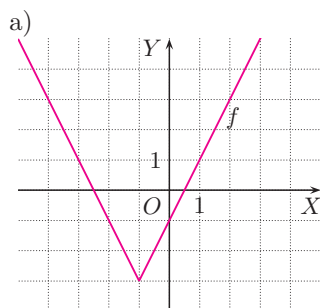
Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy, odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi OY .



50. W układzie współrzędnych obok naskicuj wykres dowolnej funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest przedział $\langle -2; 4 \rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -2; 3 \rangle$ oraz wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.
Podaj dziedzinę funkcji g : _____.



51. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj na tym samym rysunku wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Odczytaj z wykresu zbiory rozwiązań nierówności $f(x) \leq -1$ oraz $g(x) \leq -1$.



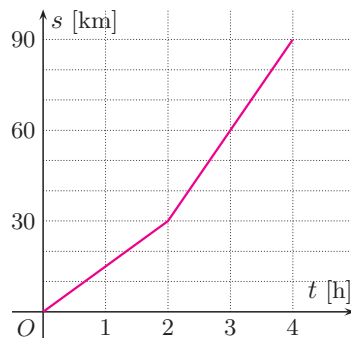
$f(x) \leq -1$ dla $x \in \langle -2; 0 \rangle$

$g(x) \leq -1$ dla _____

4.10. Funkcje – zastosowania

52. Dwóch rowerzystów A i B wyruszyło o godzinie 10.00 na wycieczkę tą samą trasą. Na rysunku przedstawiono wykres zależności drogi przebytej przez rowerzystę A od czasu.

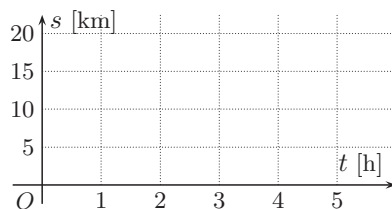
a) Odczytaj z wykresu, z jaką prędkością poruszał się rowerzysta A w ciągu pierwszych dwóch godzin jazdy, a z jaką w ciągu dwóch następnych.



b) Rowerzysta B przez pierwszą godzinę jechał z prędkością 30 km/h, a następnie zwolnił do 15 km/h i jechał z tą prędkością przez 3 godziny. Naszkicuj na rysunku obok wykres drogi przebytej przez tego rowerzystę w zależności od czasu.

c) O której godzinie rowerzysta A wyprzedził rowerzystę B ? Jaka była odległość między nimi o godzinie 14.00?

53. Przez pierwsze dwie godziny turysta maszerował z prędkością 5 km/h. Następnie godzinę odpoczywał i kolejne dwie godziny szedł z prędkością 2,5 km/h. Naszkicuj wykres pokazujący zależność pokonanej drogi od czasu.

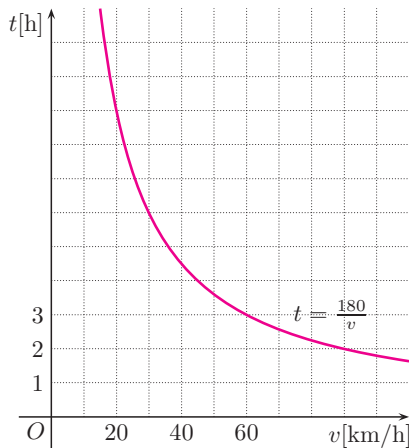


54. Odległość między miastami A i B jest równa 180 km. Czas t (w godzinach) potrzebny na przebycie tej drogi samochodem jadącym ze średnią prędkością v [km/h] można obliczyć na podstawie wzoru $t = \frac{180}{v}$.

a) Uzupełnij tabelę.

v [km/h]	30	40		90
t [h]			3	

b) Które z punktów: $K(45, 4)$, $L(54, \frac{7}{2})$, $M(72, \frac{5}{2})$ należą do wykresu przedstawionego na rysunku?



55. Zależność między średnią prędkością v [km/h] a czasem t [h] potrzebnym do przebycia drogi 240 km opisuje wzór $t = \frac{240}{v}$. Sporządź tabelę i odpowiedni wykres.

Zestaw powtórzeniowy I

56. Naskicuj wykres funkcji $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbf{R}$, która każdemu argumentowi przyporządkowuje: a) liczbę o połowę mniejszą, b) jego odwrotność. Czy jest to funkcja monotoniczna?

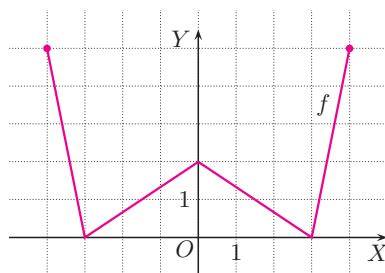
57. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$ o podanej dziedzinie D i określ zbiór wartości tej funkcji.

- a) $D = \mathbf{R}$ c) $D = (-\infty; 1)$ e) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
b) $D = (0; \infty)$ d) $D = \langle -1; 2 \rangle$ f) $D = \langle -2; -1 \rangle \cup (1; 3)$

58. Naskicuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z niego zbiór wartości funkcji oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 4$.

a) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -5) \\ -x & \text{dla } x \in (-5; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 4 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$

59. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj jej zbiór wartości. Naskicuj wykres funkcji g , wyznacz jej dziedzinę i zbiór wartości.



- a) $g(x) = f(x) + 1$ c) $g(x) = f(x - 2)$
b) $g(x) = f(x) - 2$ d) $g(x) = f(x + 1)$

60. Wpisz w miejsce znak $<$ lub $>$.

- a) Jeśli f jest funkcją rosnącą i $a > 1$, to $f(a)$ $f(1)$.
b) Jeśli f jest funkcją malejącą i $b < -1$, to $f(b)$ $f(-1)$.
c) Jeśli f jest funkcją rosnącą i $a > b$, to $f(-b)$ $f(-a)$.
d) Jeśli f jest funkcją malejącą i $a > b$, to $f(-b)$ $f(-a)$.

61. Uzasadnij, że jeśli f jest funkcją rosnącą i $a > b > 0$, to $f\left(\frac{1}{a}\right) < f\left(\frac{1}{b}\right)$.

62. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |x - 2|$. Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $\langle -2; 2 \rangle$ b) $\langle 3; 6 \rangle$ c) $\langle -1; 4 \rangle$

Zestaw powtórzeniowy II

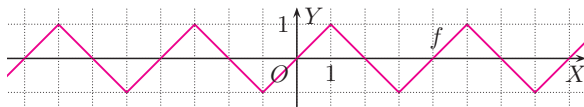
63. Określ dziedzinę funkcji f . Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

64. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji:



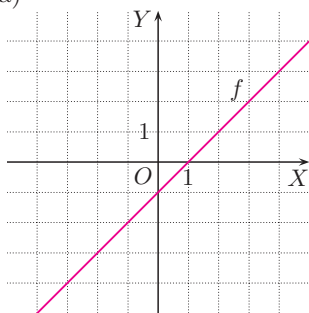
a) $g(x) = f(x) + 1$,

b) $g(x) = f(x + 1)$,

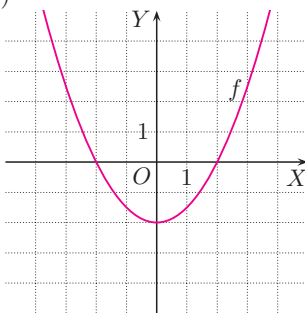
c) $g(x) = -f(x)$.

65. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj na tym samym rysunku wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj wartość największą i wartość najmniejszą funkcji g w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$.

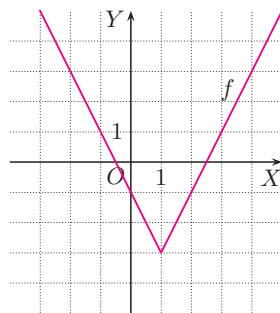
a)



b)



c)



66. Dane są funkcje:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 2-x & \text{dla } x > 1 \end{cases} \quad \text{ i } \quad g(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \leq 1 \\ |x-3|-1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

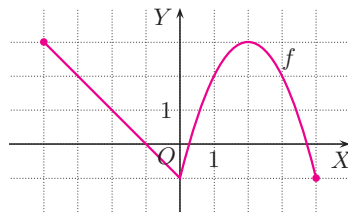
Oblicz wartości funkcji f i g dla argumentów: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ oraz $x_2 = 3 - \sqrt{2}$.

67. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(-x)$.

b) Odczytaj rozwiązanie równania:

$$f(x) = f(-x)$$



68. Które spośród liczb $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ należą do dziedziny funkcji f ?

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x+2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+3}}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-1}}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+2}}$

MATeMATyka

Nowoczesny i praktyczny zeszyt ćwiczeń dla każdego ucznia

- Sprawdzone narzędzie do pracy na lekcji i do samodzielnej pracy w domu.
- Pełne lub częściowe rozwiązania wspomagające ucznia w nauce.
- Zestawy powtórzeniowe utrwalające wiadomości z każdego działu.

Polecamy:

Podręcznik

Zbiór zadań

Solidne powtórzenie na końcu każdego działu

Zadania typu maturalnego

Ciekawe infografiki zachęcające uczniów do samodzielnych poszukiwań

Doskonałe narzędzia zarówno do pracy na lekcji, jak i do samodzielnej pracy w domu

Zadania o zróżnicowanym stopniu trudności

Zadania o podwyższonym stopniu trudności dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką

Do obu zakresów: podstawowego i rozszerzonego



Dla ucznia przygotowaliśmy:

- podręcznik
- zeszyt ćwiczeń
- zbiór zadań
- zbiory zadań maturalnych

Nauczycielom polecamy:

- program nauczania
- książkę nauczyciela
- generator sprawdzianów