5 Trygonometria

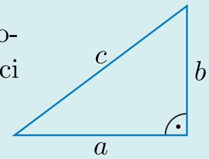
Skocznia narciarska składa się z rozbiegu, buli (czyli grzbietu skoczni) oraz zeskoku (miejsca, w którym skoczkowie lądują). Ustawienie belki startowej reguluje długość rozbiegu, który kończy się progiem. Natomiast za zeskokiem znajduje się wybieg, na którym zawodnicy hamują. Nachylenie poszczególnych części skoczni można podawać w procentach (patrz zad. 5, s. 163). Aby je obliczyć, korzystamy z funkcji trygonometrycznej tangens.

Trójkąty prostokątne – powtórzenie

TWIERDZENIE PITAGORASA

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



1. Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.

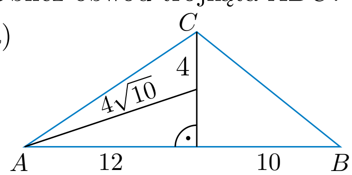
a) $a = 15$, $b = 20$ b) $a = 3$, $b = 9$ c) $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{2} + 1$

2. Oblicz obwód prostokąta, którego jeden bok ma długość a, a przekątna ma długość d.

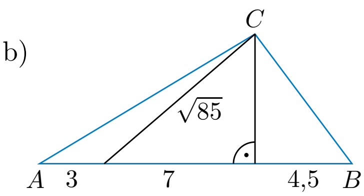
a) $a = 10$, $d = 26$ b) $a = \sqrt{7}$, $d = 4$ c) $a = \sqrt{5}+2$, $d = 2\sqrt{5}+1$

3. Oblicz obwód trójkąta ABC.

a)



b)



4. Oblicz obwód kwadratu, którego przekątna:

a) jest równa 12,

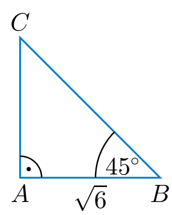
b) jest o 2 większa od boku.

Przekątna kwadratu o boku długości a jest równa $a\sqrt{2}$.

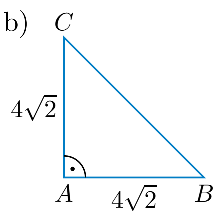
5. Oblicz obwód równoramiennego trójkąta prostokątnego o polu równym: a) 16, b) 18, c) 24.

6. Oblicz obwód trójkąta ABC i wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną.

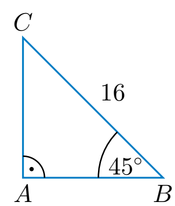
a)



b)



c)



Odpowiedzi do zadań

1. a) 25 **b)** $3\sqrt{10}$ **c)** $\sqrt{6}$

2. a) 68
b) $2(3 + \sqrt{7})$
c) $2(\sqrt{5} + 2\sqrt{3} + 2)$

3. a) $2(11 + \sqrt{41} + 2\sqrt{13})$
b) $2(11 + \sqrt{34})$

4. a) $a\sqrt{2} = 12$
$a = 6\sqrt{2}$
$Ob = 24\sqrt{2}$
b) $a\sqrt{2} = a + 2$
$a = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)$
$Ob = 8\left(\sqrt{2} + 1\right)$

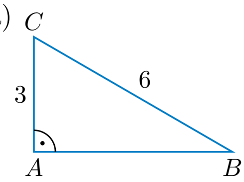
5. Niech a – długość przyprostokątnej, $a\sqrt{2}$ – długość przeciwprostokątnej.
a) $P = \frac{a^2}{2} = 16$
$a = 4\sqrt{2}$
$a\sqrt{2} = 8$
$Ob = 8(\sqrt{2} + 1)$
b) $P = \frac{a^2}{2} = 18$
$a = 6$
$a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
$Ob = 6(\sqrt{2} + 2)$
c) $P = \frac{a^2}{2} = 24$
$a = 4\sqrt{3}$
$a\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$
$Ob = 4(2\sqrt{3} + \sqrt{6})$

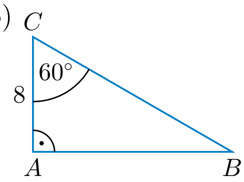
6. Niech h – szukana wysokość.
a) $|AC| = |AB| = \sqrt{6}$,
$|BC| = \sqrt{6 + 6} = 2\sqrt{3}$
$Ob = 2(\sqrt{6} + \sqrt{3})$
$P = \frac{1}{2}(\sqrt{6})^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot h$
$h = \sqrt{3}$
b) $|BC| = \sqrt{32 + 32} = 8$
$Ob = 8(\sqrt{2} + 1)$
$P = \frac{1}{2}(4\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h$
$h = 4$
c) $|AC| = |AB| = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$
$Ob = 16(\sqrt{2} + 1)$
$P = \frac{1}{2}(8\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot h$
$h = 8$

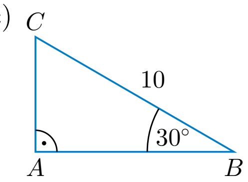
Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

7. a) Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o obwodzie równym 48.
b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego o wysokości równej 12.

8. Oblicz obwód trójkąta ABC.

a) 

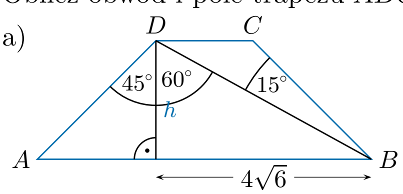
b) 

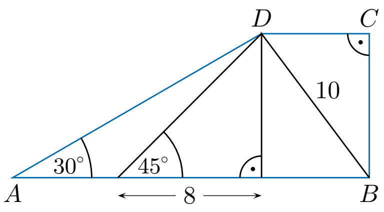
c) 

9. W trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątna ma długość c, jeden z kątów ostrych ma miarę 30°. Oblicz wysokości tego trójkąta.

a) $c = 8$ b) $c = 4\sqrt{2}$ c) $c = 2\sqrt{6}$

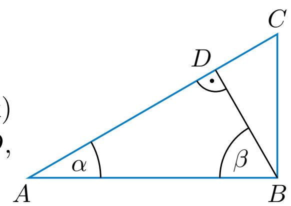
10. Oblicz obwód i pole trapezu $ABCD$.

a) 

b) 

11. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC, jeśli:
a) $\sphericalangle CAB = 30°$, $\sphericalangle CBA = 45°$, $|BC| = 2\sqrt{2}$,
b) $\sphericalangle CAB = 60°$, $\sphericalangle ACB = 75°$, $|AC| = 4\sqrt{6}$.

12. W trójkącie prostokątnym ABC (rysunek obok) $5\alpha + 7\beta = 570°$. Oblicz wysokości trójkąta BCD, jeśli pole trójkąta ABD jest równe $8\sqrt{3}$.



TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA PITAGORASA

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

13. Sprawdź, czy trójkąt o danych bokach jest trójkątem prostokątnym.

a) 6, 8, 10 b) 9, 10, 13 c) $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt{3} + 1$, $2\sqrt{2}$

7. **a)** $8\sqrt{3}$
b) $24\sqrt{3}$

8. **a)** $3(\sqrt{3} + 3)$
b) $8(\sqrt{3} + 3)$
c) $5(\sqrt{3} + 3)$

9. **a)** $2\sqrt{3}$, 4, $4\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$
c) $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

10. **a)** $Ob = 8(\sqrt{6} + 2)$, $P = 32\sqrt{3}$
b) $Ob = 4(2\sqrt{3} + 9)$, $P = 16(2\sqrt{3} + 3)$

11. **a)** $Ob = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 3)$, $P = 2(\sqrt{3} + 1)$
b) $Ob = 6(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2)$, $P = 12(\sqrt{3} + 3)$

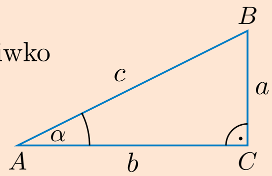
12. 4, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 2

13. **a)**, **c)** jest **b)** nie jest

5.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego są tak powszechnie stosowane, że otrzymały własne nazwy.

DEFINICJA



Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem** kąta.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem** kąta.

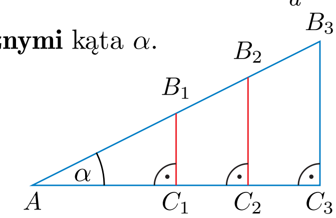
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie nazywamy **tangensem** kąta.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Rozpatruje się też stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta. Jest to **cotangens** kąta: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

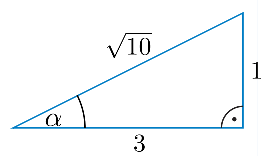
Stosunki te nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kąta α.



Zauważmy, że nie zależą one od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α. Z podobieństwa trójkątów: AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3 wynikają równości:

$$\sin\alpha = \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AB_2|} = \frac{|B_3C_3|}{|AB_3|}$$

Przykład 1



Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α (rysunek obok).

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych bokach:

a) 3, 4, 5, b) 6, 8, 10, c) 2, 3, $\sqrt{13}$.

Ćwiczenie 1

We wszystkich podpunktach $\alpha < \beta$.

a, b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$

c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2}$

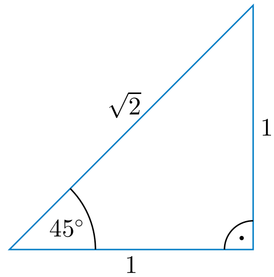
Przykład 2
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45°.

Rozpatrzmy połowę kwadratu o boku 1.

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$



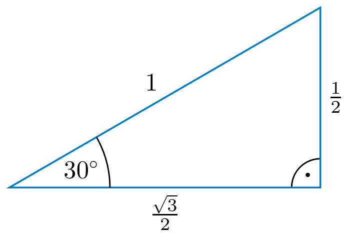
Przykład 3
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30°.

Rozpatrzmy połowę trójkąta równobocznego o boku 1.

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Ćwiczenie 2
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60°.

ZADANIA

1. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Skrót *sin* pochodzi od łacińskiego słowa *sinus* – zagięcie, zatoka;
cos to skrót od *complementi sinus*, czyli sinus dopełnienia;
tg to skrót słowa *tangens* oznaczającego styczną.

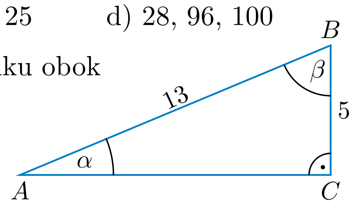
2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych bokach.

a) 15, 20, 25 b) 8, 15, 17 c) 7, 24, 25 d) 28, 96, 100

3. Dla trójkąta ABC przedstawionego na rysunku obok oblicz wartości:

a) $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$,

b) $\sin\beta, \cos\beta, \operatorname{tg}\beta$.



Ćwiczenie 2
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,
$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

Odpowiedzi do zadań

2. a) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{3}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{8}{17}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{15}{17}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{15}{8}$
c), d) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{7}{25}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{24}{25}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{24}{7}$

3. a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$
b) $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$

4. Przekątna prostokąta o bokach długości 1 dm i 2 dm dzieli prostokąt na dwa trójkąty. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym jedna przyprostokątna jest cztery razy dłuższa od drugiej.

6. W rombie $ABCD$ o obwodzie równym 60 przekątne przecinają się w punkcie O, a jedna z nich ma długość równą 24. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta AOB.

7. Dany jest równoległobok niebędący prostokątem o bokach długości 10 cm i 9 cm. Jedna z przekątnych dzieli równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

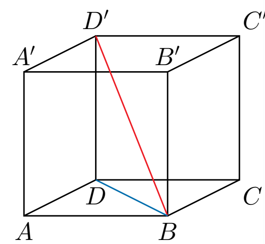
8. W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 6 cm i 10 cm, a wysokość – 5 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między dłuższą podstawą trapezu oraz jego:

a) przekątną, b) ramieniem.

9. Dany jest sześcian o krawędzi a. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta:

a) BDD',

b) $DD'O$, gdzie O jest środkiem odcinka BD.



POWTÓRZENIE

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.

a) $a = 2$, $b = 6$ b) $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ c) $a = 2$, $b = \sqrt{5}$

2. Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości 6 i 8. Wierzchołek A połączono ze środkami przeciwległych boków i w ten sposób podzielono prostokąt na czworokąt i dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

3. Przekątne rombu o długościach 10 cm i 14 cm dzielą romb na cztery trójkąty. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

---

4. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$

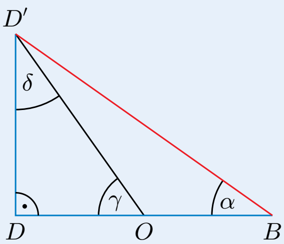
5. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = 4$

6. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{3}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$

7. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{9}{10}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{19}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{19}}{9}$

8. **a)** $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{89}}{89}$,
$\cos\alpha = \frac{8\sqrt{89}}{89}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{8}$
b) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$,
$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$

9.

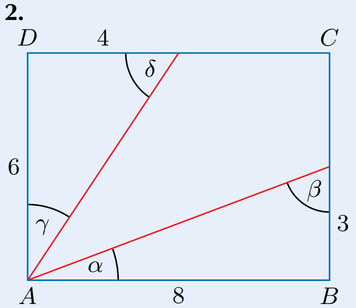


a) $\beta = \sphericalangle DD'B$, $|DD'| = a$,
$|DB| = a\sqrt{2}$, $|D'B| = a\sqrt{3}$
$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}$
b) $|DD'| = a$, $|DO| = a\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$|D'O| = a\frac{\sqrt{6}}{2}$
$\sin\gamma = \cos\delta = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
$\cos\gamma = \sin\delta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Powtórzenie

1. **a)** $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 3$
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{7}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{2}{3}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2.



$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{3\sqrt{73}}{73}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{8\sqrt{73}}{73}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{8}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{8}{3}$,
$\sin\gamma = \cos\delta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\cos\gamma = \sin\delta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\delta = \frac{3}{2}$

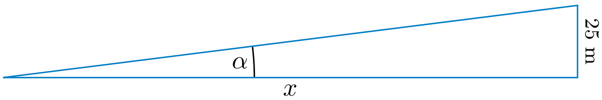
3. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5\sqrt{74}}{74}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{7\sqrt{74}}{74}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{7}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{7}{5}$

5.2. Trygonometria – zastosowania

Wartości funkcji trygonometrycznych nie zależą od wielkości trójkąta prostokątnego, a jedynie od wielkości odpowiedniego kąta. Wykorzystuje się to w sytuacjach praktycznych.

Przykład 1

Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 25 m nad poziomem morza i widać go z jachtu pod kątem α, którego tangens wynosi 0,0875. Jaka jest odległość jachtu od podnóża skarpy, na której stoi latarnia?



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{25}{x}, \quad \text{czyli} \quad x = \frac{25}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{25}{0{,}0875} \approx 286 \text{ [m]}$$

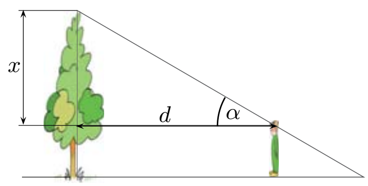
Jeśli chcemy znaleźć wartości funkcji trygonometrycznych, to korzystamy z odpowiedniego kalkulatora lub tablic matematycznych (zarówno kalkulator, jak i tablice podają wartości przybliżone). Tabela wartości funkcji trygonometrycznych znajduje się na str. 260.

Uwaga. W podręczniku dla ucznia tabela wartości funkcji trygonometrycznych znajduje się na str. 260, natomiast w podręczniku nauczyciela – na str. 234.

Przykład 2

Obserwator widzi czubek drzewa odległego o $d = 65$ m pod kątem $\alpha = 29^\circ$ (oczy ma na wysokości 1,5 m nad ziemią). Jak wysokie jest drzewo?

$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{x}{65}$$



Z tablic odczytujemy $\operatorname{tg} 29^\circ \approx 0{,}5543$, czyli $x \approx 65 \cdot 0{,}5543 \approx 36$ [m].
Wysokość drzewa jest więc równa około $36 + 1{,}5 = 37{,}5$ [m].

Ćwiczenie 1

Przyjmując, jak w przykładzie 2., że obserwator ma oczy na wysokości 1,5 m nad ziemią, oblicz wysokość drzewa, jeśli:

a) $\alpha = 40^\circ$, $d = 22$ m, b) $\alpha = 14^\circ$, $d = 100$ m.

Ćwiczenie 1

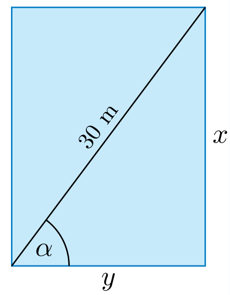
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w przykładzie 2.

a) $\frac{x}{22} = \operatorname{tg} 40^\circ \approx 0{,}8391$, czyli $x \approx 18{,}5$ m
Wysokość drzewa: $h \approx 18{,}5 + 1{,}5 = 20$ [m]

b) $\frac{x}{100} = \operatorname{tg} 14^\circ \approx 0{,}2493$, czyli $x \approx 24{,}9$ m
Wysokość drzewa: $h \approx 24{,}9 + 1{,}5 = 26{,}4$ [m]

Przykład 3

Przekątna prostokątnej działki budowlanej ma długość 30 m i tworzy z krótszym bokiem działki kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}6$. Ile metrów bieżących siatki potrzeba na jej ogrodzenie, jeżeli na bramę wjazdową należy zostawić 3 m?



Obliczamy długość jednego boku działki:

$\frac{y}{30} = \cos\alpha = 0{,}6$, czyli $y = 30 \cdot 0{,}6 = 18$ [m].

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 = 30^2 - y^2 = 900 - 324 = 576$$

$$x = \sqrt{576} = 24 \text{ [m]}$$

Zatem obwód działki: $2x + 2y = 48 + 36 = 84$ [m].

Czyli siatki potrzeba $84 - 3 = 81$ [m].

Ćwiczenie 2

Oblicz obwód prostokąta, którego przekątna długości d tworzy z jednym z boków kąt o mierze α.

a) $d = 15$, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ b) $d = 8$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Ćwiczenie 2
$\frac{y}{d} = \cos\alpha$, czyli $y = d\cos\alpha$
oraz $x = \sqrt{d^2 - y^2}$
a) $y = 3$, $x = 6\sqrt{6}$
$Ob = 12\sqrt{6} + 6$
b) $y = 2\sqrt{15}$, $x = 2$
$Ob = 4\sqrt{15} + 4$

Znajomość wartości funkcji trygonometrycznych może posłużyć do znajdowania miar kątów trójkąta.

Ćwiczenie 3

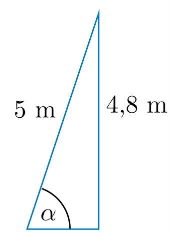
Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (s. 260), podaj przybliżoną miarę kąta α, dla którego:

a) $\sin\alpha = 0{,}4067$, b) $\sin\alpha = 0{,}4226$, c) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5735$, d) $\cos\alpha = 0{,}9200$.

Ćwiczenie 3
a) $\alpha \approx 24^\circ$
b) $\alpha \approx 25^\circ$
c) $\alpha \approx 30^\circ$
d) $\alpha \approx 23^\circ$

Przykład 4

Drabinę o długości 5 m oparto o ścianę budynku tak, że dotyka ściany na wysokości 4,8 m. Jaki kąt tworzy drabina z ziemią?



$\sin\alpha = \frac{4{,}8}{5} = 0{,}96$. Z tablic odczytujemy: $\alpha \approx 74^\circ$.

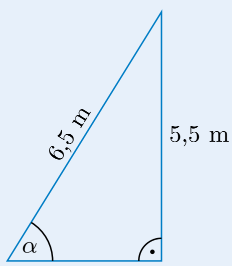
Ćwiczenie 4

Jaki kąt tworzy z ziemią drabina o długości:

a) 6,5 m, jeśli oparta o ścianę budynku sięga na wysokość 5,5 m,

b) 4,5 m, jeżeli jej koniec opierający się o ziemię jest odległy o 1 m od ściany budynku?

Ćwiczenie 4
a)



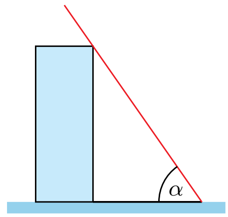
$\sin\alpha = \frac{5{,}5}{6{,}5} \approx 0{,}8462$
$\alpha \approx 58^\circ$

b)

$\cos\alpha = \frac{1}{4{,}5} \approx 0{,}2222$
$\alpha \approx 77^\circ$

ZADANIA

1. Budynek (rysunek obok) rzuca cień długości 19 m w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt $\alpha = 55^\circ$. Oblicz wysokość tego budynku.

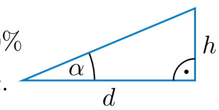


2. Oblicz długość cienia rzucanego przez budynek o wysokości 25 m w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 40°.

3. Czubek drzewa widać z odległości 80 m pod kątem 25° (z poziomu ziemi). Jaka jest wysokość drzewa? Jaka jest długość cienia rzucanego przez to drzewo, jeśli promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 70°?

4. Naciągnięty sznurek długości 20 m, na którego końcu zamocowany jest latawiec, tworzy z poziomem kąt 70°. Jak wysoko nad ziemią znajduje się latawiec?

5. Przeczytaj informację w ramce. Ile wynosi kąt α (rysunek obok), jeśli nachylenie drogi jest równe:
a) 10%, b) 30%, c) 100%?

> Nachylenie drogi jest zwykle podawane w procentach:
> $$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$
> Zauważ, że $\frac{h}{d} = \operatorname{tg} \alpha$.
>
> 
>

6. Podjazd dla wózków jest nachylony do poziomu pod kątem α. Wyraź w procentach nachylenie tego podjazdu. Czy spełnia on wymóg, że nachylenie podjazdu ma być mniejsze od 8%?
a) $\alpha = 3^\circ$ b) $\alpha = 4^\circ$ c) $\alpha = 5^\circ$

7. Drabina wozu strażackiego może być rozsunięta na długość 20 m i podniesiona pod kątem 72°. Na jaką wysokość sięgnie drabina, jeśli jest zamocowana 2,4 m nad ziemią?

8. Wierzchołek komina widać z punktu A pod kątem 26°, a z punktu B pod kątem 40°. Podstawa komina oraz punkty A i B leżą na jednej prostej. Komin ma wysokość 20 m. Jaka jest odległość między punktami A i B? Rozpatrz dwa przypadki (pomiń grubość komina).

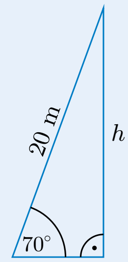
Odpowiedzi do zadań

1. około 27,13 m

2. około 29,79 m

3. drzewo: około 37,3 m, cień: około 13,58 m

4. Oznaczmy wysokość, na jakiej znajduje się latawiec, przez h.

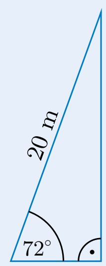


$\frac{h}{20} = \sin 70^\circ$
$h \approx 20 \cdot 0{,}9397 \approx 18{,}8$ [m]

5. **a)** około 5,7°
b) około 16,7°
c) 45°

6. **a)** około 5,2%, spełnia
b) około 7%, spełnia
c) około 8,8%, nie spełnia

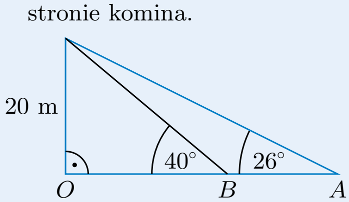
7.



Oznaczmy wysokość, na jaką sięgnie drabina, przez h.
$\frac{x}{20} = \sin 72^\circ \approx 0{,}9511$
czyli $x \approx 19{,}02$ m. Zatem:
$h \approx 19{,}02 + 2{,}4 =$
$= 21{,}42$ [m].

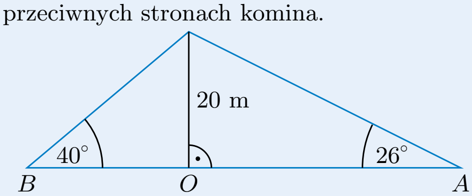
8. Podstawę komina oznaczmy przez O.

I przypadek. Punkty A i B znajdują się po tej samej stronie komina.



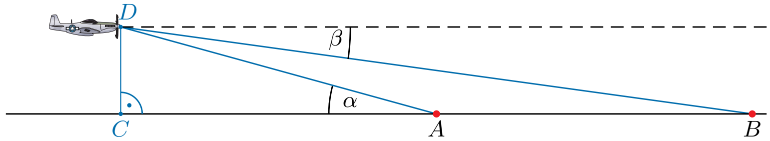
$\frac{20}{|OB|} = \operatorname{tg} 40^\circ \approx 0{,}8391$
zatem $|OB| \approx 23{,}84$ m
$\frac{20}{|OB| + |AB|} = \operatorname{tg} 26^\circ \approx 0{,}4877$
czyli $|AB| \approx 17{,}17$ m

II przypadek. Punkty A i B znajdują się po przeciwnych stronach komina.



Jak w przypadku 1° mamy $|OB| \approx 23{,}84$ m.
$\frac{20}{|OA|} = \operatorname{tg} 26^\circ \approx 0{,}4877$, czyli $|OA| \approx 41$ m
Stąd $|AB| = |OA| + |OB| \approx 64{,}84$ m.

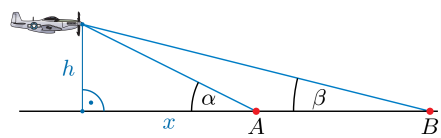
9. Pilot lecący samolotem na wysokości 50 m widzi początek pasa startowego pod kątem $\alpha = 30°$, a jego koniec pod kątem $\beta = 10°$. Samolot nadlatuje wzdłuż pasa startowego. Jaka jest długość tego pasa?



10. Samolot zbliżający się do lotniska leci na wysokości 2400 m. Do lądowania musi schodzić pod kątem 4°. Jak daleko od początku pasa startowego powinien rozpocząć ten manewr?

11. Startujący samolot wznosi się pod kątem 15° z prędkością 80 m/s. Jaką wysokość osiągnie samolot po 2 minutach od momentu oderwania się od ziemi?

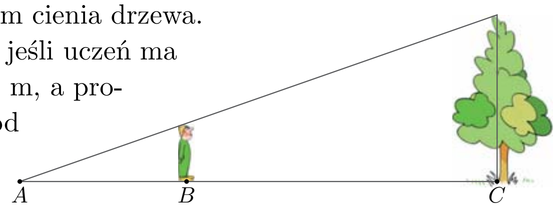
12. Dwaj obserwatorzy stojący w punktach A i B w odległości 200 m od siebie widzą nadlatujący wzdłuż kierunku AB samolot pod kątami $\alpha = 25°$ i $\beta = 15°$. Na jakiej wysokości leci samolot?



POWTÓRZENIE

1. Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli budynek o wysokości 30 m rzuca cień długości: a) 20 m, b) 30 m, c) 60 m?

2. W celu obliczenia wysokości drzewa uczeń ustawił się tak, że koniec jego cienia pokrywał się z końcem cienia drzewa. Jaka jest wysokość drzewa, jeśli uczeń ma 180 cm wzrostu, $|BC| = 18$ m, a promienie słoneczne padają pod kątem 31° do powierzchni ziemi?



9. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

$\operatorname{tg} 30° = \frac{50}{|CA|}$

zatem:

$|CA| \approx \frac{50}{0{,}5774} \approx 86{,}6$ [m]

$\operatorname{tg} 10° = \frac{50}{|AB|+|CA|}$

zatem:

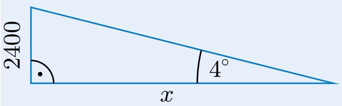
$|AB| + |CA| \approx \frac{50}{0{,}1763} \approx$

$\approx 283{,}6$ [m]

$|AB| \approx 283{,}6 - 86{,}6 =$
$= 197$ [m]

Długość pasa startowego wynosi około 197 m.

10.



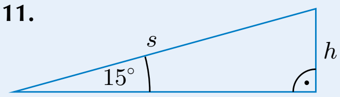
$\operatorname{tg} 4° = \frac{2400}{x}$

zatem:

$x \approx \frac{2400}{0{,}0699} \approx 34\,334{,}8$ [m]

Około 34,3 km.

11.



Obliczamy drogę, jaką pokona samolot: $v = \frac{s}{t}$, czyli $s = 80 \cdot 120 = 9600$ [m]

Obliczamy wysokość, jaką osiągnie samolot:

$\frac{h}{s} = \sin 15° \approx 0{,}2588$, czyli

$h \approx 2484$ m

12. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$\frac{h}{x} = \operatorname{tg} 25° \approx 0{,}4663$, czyli $x \approx 2{,}1445h$.

$\frac{h}{x+200} = \operatorname{tg} 15° \approx 0{,}2679$, czyli $x \approx 3{,}7327h - 200$.

Zatem:

$3{,}7327h - 200 = 2{,}1445h$

$h \approx 125{,}93$ m

Samolot leci na wysokości około 125,93 m.

Powtórzenie

1. **a)** około 56,3° **b)** 45° **c)** około 26,6°

2. Oznaczmy wysokość drzewa przez h.

$\operatorname{tg} 31° = \frac{1{,}8}{|AB|}$

zatem:

$|AB| \approx \frac{1{,}8}{0{,}6009} \approx 3$ [m]

$|AC| \approx 18 + 3 = 21$ [m]

$\operatorname{tg} 31° \approx \frac{h}{21}$, czyli $h \approx 21 \cdot 0{,}6009 \approx 12{,}62$ [m].

5.3. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

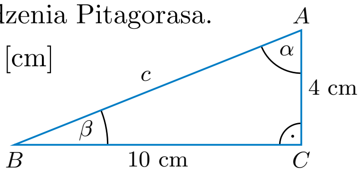
Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i wyznaczenie miar jego trzech kątów. Aby **rozwiązać trójkąt prostokątny**, wystarczy znać:
– długości dowolnych dwóch boków,
– długość dowolnego boku i miarę jednego z kątów ostrych.

Przykład 1
Rozwiąż trójkąt prostokątny, mając dane długości jego przyprostokątnych 4 cm i 10 cm.

Długość przeciwprostokątnej obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$c = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ [cm]}$$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Z tablic odczytujemy: $\beta \approx 22^\circ$
i stąd $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 68^\circ$.

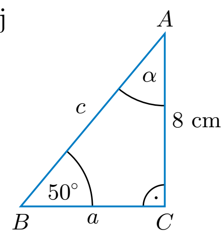


Przykład 2
Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 50° jest równa 8 cm.

$\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$\frac{8}{c} = \sin 50^\circ \approx 0{,}7660$, stąd $c \approx 10{,}44$ cm.

$\frac{8}{a} = \operatorname{tg} 50^\circ \approx 1{,}1918$, stąd $a \approx 6{,}71$ cm.



Ćwiczenie 1
Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli:
a) dwa jego dłuższe boki mają długości 9 cm i 10 cm,
b) długości przyprostokątnych są równe 5 cm i 13 cm,
c) przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jeden z kątów ma miarę 37°,
d) długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 54° jest równa 8 cm.

Jeśli potrzebna jest większa dokładność, to miarę kąta możemy podawać w **stopniach** i **minutach**, a nawet w **sekundach**, np. $36^\circ 45' 17''$.

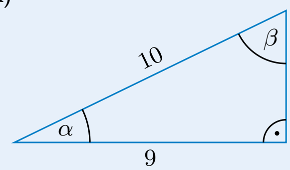
Przykład 3
Wyraź w minutach i sekundach $\frac{1}{1000}$ kąta 45°.

$$\frac{45^\circ}{1000} = \frac{45}{1000} \cdot 3600'' = 162'' = 120'' + 42'' = 2'42''$$

$1^\circ = 60'$
$1' = 60''$
$1^\circ = 3600''$

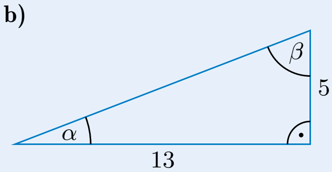
Ćwiczenie 1

a)



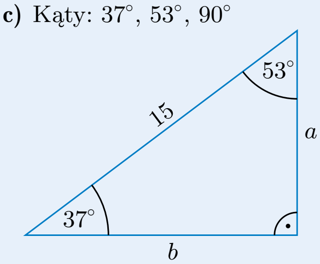
Boki: 9 cm, 10 cm,
$\sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{19}$ [cm]
Kąty: $\cos\alpha = \frac{9}{10}$, czyli
$\alpha \approx 26^\circ$,
$\beta \approx 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$, $\gamma = 90^\circ$

b)



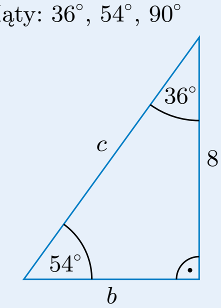
Boki: 5 cm, 13 cm,
$\sqrt{5^2 + 13^2} = \sqrt{194}$ [cm]
Kąty: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{13} \approx 0{,}3846$,
czyli $\alpha \approx 21^\circ$,
$\beta \approx 90^\circ - 21^\circ = 69^\circ$, $\gamma = 90^\circ$

c) Kąty: 37°, 53°, 90°



Boki: $a = 15 \sin 37^\circ \approx 9$ [cm],
$b = 15 \sin 53^\circ \approx 12$ [cm],
$c = 15$ cm

d) Kąty: 36°, 54°, 90°



Boki: $c = \frac{8}{\sin 54^\circ} \approx 9{,}9$ [cm],
$a = 8$ cm,
$b \approx \sqrt{(9{,}9)^2 - 8^2} =$
$= \sqrt{34{,}01} \approx 5{,}8$ [cm]

Ćwiczenie 2

Wyraź w stopniach, minutach i sekundach $\frac{1}{100}$ kąta:

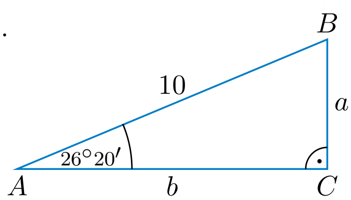
a) $360°$, b) $4°$, c) $15°$, d) $12°$, e) $42°$.

Poniżej zamieszczono fragment tablic wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów podanych z dokładnością do $10'$.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
25°00′	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	27°00′	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626
25°10′	0,4253	0,9051	0,4699	2,1283	27°10′	0,4566	0,8897	0,5132	1,9486
25°20′	0,4279	0,9038	0,4734	2,1123	27°20′	0,4592	0,8884	0,5169	1,9347
25°30′	0,4305	0,9026	0,4770	2,0965	27°30′	0,4617	0,8870	0,5206	1,9210
25°40′	0,4331	0,9013	0,4806	2,0809	27°40′	0,4643	0,8857	0,5243	1,9074
25°50′	0,4358	0,9001	0,4841	2,0655	27°50′	0,4669	0,8843	0,5280	1,8940
26°00′	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	28°00′	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807
26°10′	0,4410	0,8975	0,4913	2,0353	28°10′	0,4720	0,8816	0,5354	1,8676
26°20′	0,4436	0,8962	0,4950	2,0204	28°20′	0,4746	0,8802	0,5392	1,8546
26°30′	0,4462	0,8949	0,4986	2,0057	28°30′	0,4772	0,8788	0,5430	1,8418
26°40′	0,4488	0,8936	0,5022	1,9912	28°40′	0,4797	0,8774	0,5467	1,8291
26°50′	0,4514	0,8923	0,5059	1,9768	28°50′	0,4823	0,8760	0,5505	1,8165

Przykład 4

Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).



$\sphericalangle ABC = 90° - 26°20' = 63°40'$

$\sin \sphericalangle BAC = \frac{a}{10}$, stąd $a = 10 \cdot \sin 26°20' \approx 4{,}436$.

$\cos \sphericalangle BAC = \frac{b}{10}$, stąd $b = 10 \cdot \cos 26°20' \approx 8{,}962$.

Ćwiczenie 3

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Rozwiąż ten trójkąt.

a) $\sphericalangle CAB = 28°40'$, $|AC| = 8$ b) $\sphericalangle CBA = 53°40'$, $|AB| = 20$

ZADANIA

1. Rozwiąż trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b.

a) $a = 3$, $b = 4$ b) $a = 4$, $b = 6$ c) $a = 4$, $b = 8$

2. Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli długość:

a) przeciwprostokątnej jest równa 12 cm, a przyprostokątnej – 10 cm,

b) przeciwprostokątnej jest równa 7 cm, a jeden z kątów ma miarę 43°,

c) przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 26° jest równa 12,5 cm.

Ćwiczenie 2

a) $3°36'$

b) $2'24''$

c) $9'$

d) $7'12''$

e) $25'12''$

Ćwiczenie 3

a) Kąty: $28°40'$, $61°20'$, $90°$

Boki:

$|BC| = 8 \operatorname{tg} 28°40' \approx 4{,}37$,

$|AC| = 8$,

$|AB| \approx \sqrt{4{,}37^2 + 8^2} \approx$

$\approx \sqrt{83{,}1} \approx 9{,}12$

b) Kąty: $36°20'$, $53°40'$, $90°$

Boki:

$|AB| = 20$,

$|BC| = 20 \cos 53°40' \approx 11{,}85$,

$|AC| = 20 \sin 53°40' \approx 16{,}11$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $c = 5$, $\alpha \approx 36°52'$, $\beta \approx 53°8'$, $\gamma = 90°$

b) $c = 2\sqrt{13}$, $\alpha \approx 33°41'$, $\beta \approx 56°19'$, $\gamma = 90°$

c) $c = 4\sqrt{5}$, $\alpha \approx 26°34'$, $\beta \approx 63°26'$, $\gamma = 90°$

2. a) kąty ostre: około $56°26'$, $33°34'$; druga przyprostokątna: $2\sqrt{11}$ cm

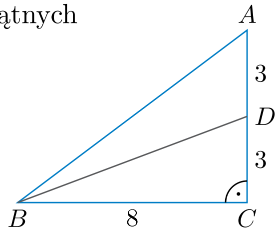
b) drugi kąt ostry: $47°$; przyprostokątne: około 4,77 cm, 5,12 cm

c) drugi kąt ostry: $64°$; druga przyprostokątna: około 25,63 cm, przeciwprostokątna: około 28,51 cm

3. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości 6 i 8 (rysunek obok).

a) Rozwiąż trójkąty ABC i BCD.

b) Rozwiąż trójkąt ABD.



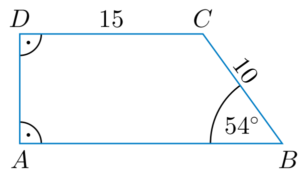
4. Przekątne rombu mają długości 12 cm i 20 cm. Oblicz kąty rombu i jego obwód.

5. a) Trapez równoramienny ma podstawy długości 6 dm i 10 dm, a jego obwód jest równy 32 dm. Oblicz miary kątów tego trapezu.

b) Trapez równoramienny ma podstawy długości 2 dm i 10 dm, a jego przekątna ma długość 8 dm. Oblicz miary kątów tego trapezu.

6. W trapezie równoramiennym o wysokości 5 cm odcinek łączący środki ramion ma długość 6 cm. Oblicz miarę kąta, jaki przekątna trapezu tworzy z jego podstawą.

7. Oblicz długości boków AB i AD oraz miarę kąta DCA trapezu prostokątnego $ABCD$ (rysunek obok).



8. Przekątne deltoidu mają długości 20 cm i 30 cm. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku 2 : 1. Oblicz miary kątów deltoidu.

POWTÓRZENIE

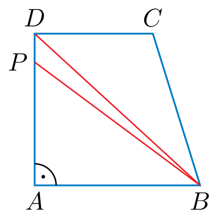
1. Zapisz w minutach i sekundach:

a) $\frac{1}{20}$ kąta 15°, b) $\frac{1}{100}$ kąta 90°, c) $\frac{1}{300}$ kąta 5°.

2. W trapezie prostokątnym $ABCD$ (rysunek obok) kąt ADB ma miarę $43°46'25''$, a kąt ABC – miarę $73°42'10''$.

a) Wyznacz miary kątów trójkąta BCD.

b) Wyznacz miary kątów trójkąta ABP, jeśli punkt P leży na dwusiecznej kąta ABC.



3. Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości:

a) 5, 12, b) 8, 15, c) 12, 16.

4. W równoległoboku o bokach długości 10 cm i 30 cm krótsza przekątna tworzy z jednym bokiem kąt 90°. Oblicz miary kątów równoległoboku.

3. a) $|AB| = 10$, $|BD| = \sqrt{73}$, $\sphericalangle ABC \approx 36°52'$, $\sphericalangle BAC \approx 53°8'$, $\sphericalangle DBC \approx 20°33'$, $\sphericalangle BDC \approx 69°27'$

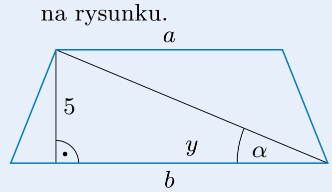
b) $|AB| = 10$, $|BD| = \sqrt{73}$, $\sphericalangle DAB \approx 53°8'$, $\sphericalangle BDA \approx 110°33'$, $\sphericalangle ABD \approx 16°19'$

4. około 62°, 118°, $Ob = 8\sqrt{34}$ cm

5. a) około $75°30'$, $75°30'$, $104°30'$, $104°30'$

b) około $52°55'$, $52°55'$, $127°5'$, $127°5'$

6. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$y = a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{a+b}{2}$

Odcinek łączący środki ramion ma długość: $\frac{a+b}{2} = 6$. Zatem $y = 6$ cm.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333$,

czyli $\alpha \approx 40°$

7. $|AB| \approx 20{,}89$, $|AD| \approx 8{,}09$, $\sphericalangle DCA \approx 28°$

8. 90°, około $53°8'$, $108°26'$, $108°26'$

Powtórzenie

1. a) $45' = 2700''$

b) $54' = 3240''$

c) $1' = 60''$

2. a) $\sphericalangle BCD \approx 106°17'50''$, $\sphericalangle DBC \approx 27°28'35''$, $\sphericalangle BDC \approx 46°13'35''$

b) $\sphericalangle PAB = 90°$, $\sphericalangle ABP \approx 36°51'5''$, $\sphericalangle BPA \approx 53°8'55''$

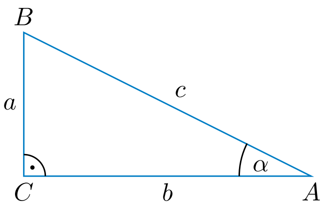
3. a) $c = 13$, $\alpha \approx 22°36'$, $\beta \approx 67°24'$

b) $c = 17$, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$

c) $c = 20$, $\alpha \approx 36°50'$, $\beta \approx 53°10'$

4. około $70°32'$, $109°28'$, $70°32'$, $109°28'$

5.4. Związki między funkcjami trygonometrycznymi



Przypomnijmy, że w trójkącie prostokątnym:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

PODSTAWOWE TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są zależności:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Ćwiczenie 1

Udowodnij, że dla dowolnego kąta ostrego α:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej, to – korzystając z podanych wyżej tożsamości – można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Wartość $\cos\alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie

Obliczamy wartość $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Ćwiczenie 1

W dowodzie jedynki trygonometrycznej korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

b) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$

Ćwiczenie 2

a) Wiadomo, że $\sin\alpha = 0{,}8$ oraz α jest kątem ostrym. Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

b) Wiadomo, że $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ oraz α jest kątem ostrym. Oblicz $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych, możemy wykorzystać odpowiedni trójkąt prostokątny.

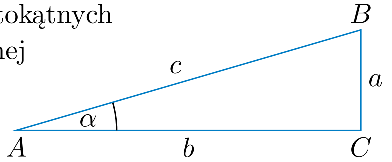
Ćwiczenie 3

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przykład

Wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$ oraz α jest kątem ostrym. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

Rysujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a = 7$ i $b = 24$. Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:



$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Zatem:

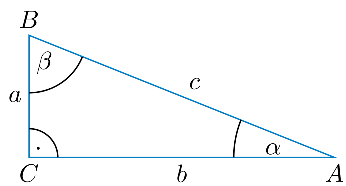
$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \qquad \cos\alpha = \frac{24}{25}$$

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = 2$

Przykład 2

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC.



W tym trójkącie $\beta = 90^\circ - \alpha$. Zauważmy, że:

$$\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

i jednocześnie $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, zatem $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

TWIERDZENIE

1. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
3. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Ćwiczenie 4

Uzasadnij podane wyżej tożsamości trygonometryczne 2. i 3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$.

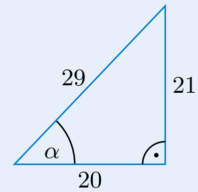
Ćwiczenie 2

a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

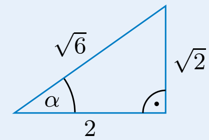
Ćwiczenie 3

a)



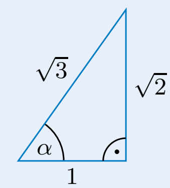
$\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$

b)



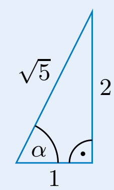
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c)



$\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d)



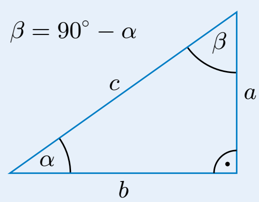
$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Ćwiczenie 4

Uzasadnienie tożsamości trygonometrycznych:

2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha$

3. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$



a) $\cos\alpha = \frac{3}{10}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

ZADANIA

1. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\cos\alpha = 0{,}8$,   c) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$,   e) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$,   g) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$,
b) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$,   d) $\sin\alpha = 0{,}4$,   f) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$,   h) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$.

2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,   c) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}$,   e) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$,
b) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{5}{13}$,   d) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$,   f) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 2$.

3. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Oblicz obwód tego trójkąta.

a) $|AC| = 12$, $\sin\sphericalangle BAC = \frac{5}{13}$ c) $|BC| = \sqrt{3}$, $\sin\sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{6}}{3}$
b) $|AC| = 4$, $\sin\sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $|BC| = 6$, $\cos\sphericalangle BAC = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

4. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α, a przeciwprostokątna ma długość c. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $c = 15$ cm   b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $c = 39$ cm

5. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (s. 260), wyznacz przybliżone wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

a) $\sin\alpha = 0{,}91$ b) $\cos\alpha = 0{,}91$ c) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}55$ d) $\operatorname{tg}\alpha = 4$

6. Przedstaw w prostszej postaci.

a) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$ c) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ e) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$
b) $(1+\sin(90^\circ-\alpha))(1-\cos\alpha)$ d) $\sin\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ f) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

7. a) Wyznacz miary kątów trójkąta prostokątnego, wiedząc, że iloczyn sinusa jednego kąta ostrego i cosinusa drugiego kąta ostrego wynosi $\frac{1}{4}$.

b) Oblicz sinus kąta α, jeśli jest on trzykrotnie większy od cosinusa tego kąta. Podaj przybliżoną miarę kąta α.

POWTÓRZENIE

1. Czy istnieje kąt ostry α, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$,   c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$,
b) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$,   d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$?

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$
b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$
c) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$
e) $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$
f) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$
g) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$
h) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

2. a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$
c) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$
f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

3. a) $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{5}{13}$, czyli
$|BC| = \frac{5}{13} \cdot |AB|$
$|AB|^2 = 12^2 + \left(\frac{5}{13} \cdot |AB|\right)^2$
$|AB| = 13$, $|BC| = 5$
Zatem $Ob = 30$.
b) $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, czyli
$|AB| = 4\sqrt{5}$
$|BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = 8$
Zatem $Ob = 4(\sqrt{5} + 3)$.
c) $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, czyli
$|AC| = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot |AB|$
$|AB|^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot |AB|\right)^2$
$|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{6}$
Zatem $Ob = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$.
d) $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, czyli
$|AC| = \frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot |AB|$
$|AB|^2 = 6^2 + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot |AB|\right)^2$
$|AB| = 3\sqrt{13}$, $|AC| = 9$
Zatem $Ob = 3\left(\sqrt{13} + 5\right)$

4. a) 9 cm i 12 cm
b) 15 cm i 36 cm

5. a) $\cos\alpha \approx 0{,}41$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 2{,}25$
b) $\sin\alpha \approx 0{,}41$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}45$
c) $\sin\alpha \approx 0{,}48$, $\cos\alpha \approx 0{,}87$
d) $\sin\alpha \approx 0{,}97$, $\cos\alpha \approx 0{,}24$

6. a) $\cos^2\alpha$ **b)** $\sin^2\alpha$ **c)** $\sin\alpha$ **d)** $\cos\alpha$ **e)** $\cos\alpha$ **f)** 1

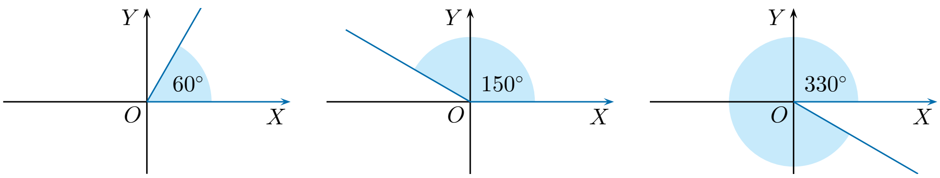
7. a) 30°, 60°, 90°
b) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\alpha \approx 71^\circ 34'$

Powtórzenie

1. a), d) nie istnieje
b), c) istnieje

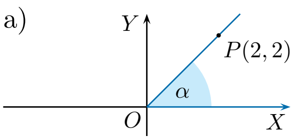
5.5. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)

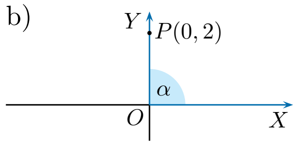
Dla uproszczenia obliczeń, kąty umieszcza się często w układzie współrzędnych w ten sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta. Jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX. Drugie ramię będziemy nazywać **ramieniem końcowym**. Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

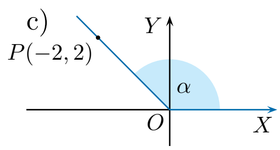


Ćwiczenie 1

Ile jest równa miara kąta, do którego ramienia końcowego należy punkt P? Podaj współrzędne innego punktu należącego do ramienia końcowego tego kąta.

a)


b)


c)


Ćwiczenie 1

a) 45°, $Q(1,1)$

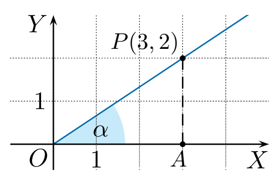
b) 90°, $Q(0,1)$

c) 135°, $Q(-1,1)$

Przykład 1

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $(3,2)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

W układzie współrzędnych prowadzimy półprostą OP (ramię końcowe kąta) oraz rysujemy trójkąt prostokątny POA (rysunek obok).



Mamy $|OA| = 3$, $|AP| = 2$ oraz:

$$|OP| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Zatem $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

Ćwiczenie 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P(3,4)$ b) $P(6,8)$ c) $P(\sqrt{3},1)$ d) $P(3,3\sqrt{3})$

Ćwiczenie 2

a) $|OP| = 5$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

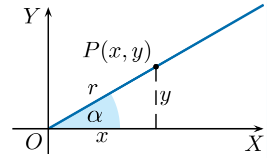
b) $|OP| = 10$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

c) $|OP| = 2$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $|OP| = 6$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$

Jeśli $P(x,y)$ jest dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α, różnym od początku układu współrzędnych, to:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0,$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r},$$
$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

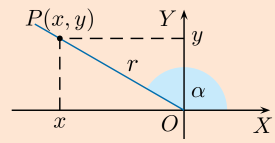


Podane powyżej wzory służą również do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0°; 180°\rangle$.

DEFINICJA

Niech $P(x,y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0°; 180°\rangle$, różnym od początku układu współrzędnych. Wtedy:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{gdzie } r = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \ (x \neq 0, \text{ czyli } \alpha \neq 90°).$$



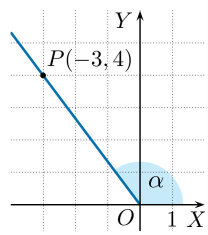
Uwaga. Każdy ze stosunków: $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ zależy wyłącznie od położenia ramienia końcowego kąta, a nie zależy od wyboru punktu P.

Przykład 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3,4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$r = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$, zatem $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.



Dla $\alpha \in (0°; 90°)$ zachodzą nierówności: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Dla $\alpha \in (90°; 180°)$ zachodzą nierówności: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Ćwiczenie 3

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P. Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych.

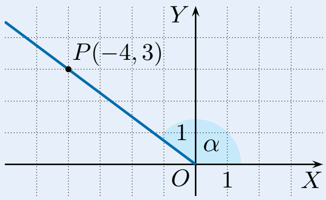
a) $P(-4,3)$ b) $P(-8,6)$ c) $P(-1,3)$ d) $P(-2,6)$

Ćwiczenie 4

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3,1)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Sprawdź, czy dla obliczonych wartości zachodzi równość: a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, b) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

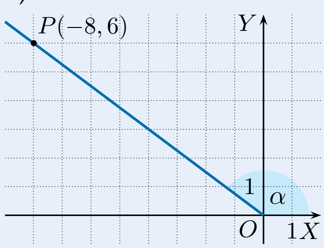
Ćwiczenie 3

a)



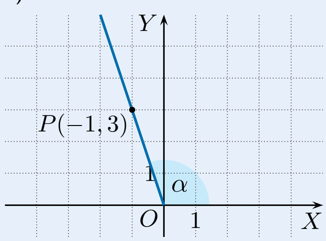
$r = 5$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$,
$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$

b)



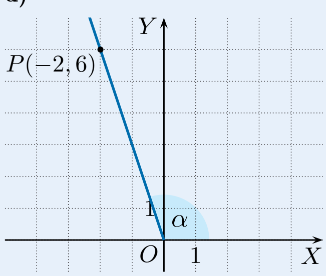
$r = 10$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$,
$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$

c)



$r = \sqrt{10}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$

d)



$r = 2\sqrt{10}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$

Ćwiczenie 4

$r = \sqrt{10}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1$

b) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{10}}{10} : \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = -\frac{1}{3} = \operatorname{tg}\alpha$

Ćwiczenie 5

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

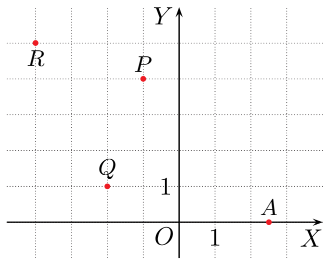
Dla dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$ prawdziwe są zależności:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ dla $\alpha \neq 90°$

ZADANIA

1. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta (rysunek obok).

a) $\sphericalangle AOP$ b) $\sphericalangle AOQ$ c) $\sphericalangle AOR$



2. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β. Oblicz $\sin \alpha - \sin \beta$.

a) $P(-2, 4)$, $Q(4, 2)$ b) $P(-9, 3)$, $Q(2, 6)$

3. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β. Oblicz $\cos \alpha + \cos \beta$.

a) $P(3, 1)$, $Q(-1, \frac{1}{2})$ b) $P(-2, \sqrt{2})$, $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

4. Wybierz dowolny punkt na ramieniu końcowym kąta α i oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Sprawdź poprawność informacji podanych w tabeli.

a) $\alpha = 0°$ b) $\alpha = 90°$ c) $\alpha = 180°$

α	$0°$	$90°$	$180°$
$\sin \alpha$	0	1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	×	0

5. Oblicz.

a) $\sin 90° + 2\cos 0°$ c) $\operatorname{tg} 180° - 2\cos 180°$

b) $3\sin 0° - 4\cos 90°$ d) $4\sin 0° - 6\cos 180°$

6. Oblicz: $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 90°; 180° \rangle$ oraz:

a) $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$, b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. Oblicz: $\cos^2 \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 90°; 180° \rangle$ oraz:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

POWTÓRZENIE

1. Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P(5, 12)$ c) $P(-5, 12)$ e) $P(\sqrt{5}, 2)$ g) $P(-\sqrt{3}, 1)$

b) $P(1, \frac{4}{3})$ d) $P(-5, 10)$ f) $P(\sqrt{2}, 1)$ h) $P(-\sqrt{3}, \sqrt{6})$

Ćwiczenie 5

Niech punkt $P(x, y)$ leży na ramieniu końcowym kąta α oraz $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$
$= \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} =$
$= \frac{r^2}{r^2} = 1$

2. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin \sphericalangle AOP = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
$\cos \sphericalangle AOP = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
$\operatorname{tg} \sphericalangle AOP = -4$
b) $\sin \sphericalangle AOQ = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos \sphericalangle AOQ = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg} \sphericalangle AOQ = -\frac{1}{2}$
c) $\sin \sphericalangle AOR = \frac{5\sqrt{41}}{41}$,
$\cos \sphericalangle AOR = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$,
$\operatorname{tg} \sphericalangle AOR = -\frac{5}{4}$

2. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **b)** $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. a) $\frac{3\sqrt{10} - 4\sqrt{5}}{10}$
b) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3}$

5. a) 3 **b)** 0 **c)** 2 **d)** 6

6. a) $\sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$
b) $\sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg} \alpha = -2$

7. a) $\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$,
$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) $\cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$,
$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$
c) $\cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$, $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$,
$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Powtórzenie

1. a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$
b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
c) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$
d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -2$
e) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
g) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
h) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$

5.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)

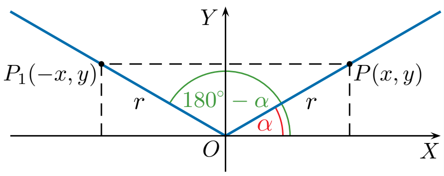
Rozpatrzmy punkt $P(x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta α oraz punkt $P_1(-x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$ (rysunek poniżej).

Zauważmy, że $|OP_1| = |OP| = r$,
zatem:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\operatorname{tg}\alpha$



Przykład 1

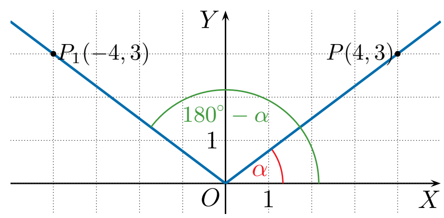
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$, jeżeli punkt $P(4, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt $P_1(-4, 3)$ – do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$.

$|OP_1| = |OP| = 5$, zatem:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}$



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych kąt α, do którego ramienia końcowego należy punkt $P(4, 2)$, oraz kąt $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°.

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

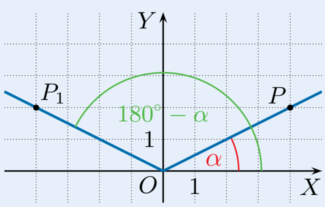
Ćwiczenie 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

a) $\alpha = 135^\circ$ b) $\alpha = 150^\circ$

Ćwiczenie 1

$P(4, 2)$, $P_1(-4, 2)$



$r = 2\sqrt{5}$,

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$,

$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 2

a) $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$

b) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Przykład 3

Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (s. 260), oblicz przybliżone wartości $\sin 125^\circ$ i $\cos 168^\circ$.

$\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ \approx 0{,}8192$

$\cos 168^\circ = \cos(180^\circ - 12^\circ) = -\cos 12^\circ \approx -0{,}9781$

Ćwiczenie 3

Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 105^\circ$, b) $\sin 165^\circ$, c) $\cos 130^\circ$, d) $\cos 175^\circ$, e) $\operatorname{tg} 142^\circ$, f) $\operatorname{tg} 163^\circ$.

ZADANIA

1. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych, sprawdź, czy prawdziwa jest podana nierówność.

a) $\sin 160^\circ + \cos 130^\circ < 0$ b) $\sin 105^\circ + \cos 145^\circ > 0$

2. Korzystając z podanych obok informacji, oblicz:

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$ $\operatorname{tg}\gamma = \frac{5}{6}$ $\cos\beta = \frac{2}{3}$

a) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \beta)$,

b) $2\sin(180^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \beta) + \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma)$.

3. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych, wyznacz przybliżoną miarę kąta rozwartego β.

a) $\sin\beta = 0{,}9397$ c) $\cos\beta = -0{,}9613$ e) $\operatorname{tg}\beta = -0{,}7265$

b) $\sin\beta = 0{,}4695$ d) $\cos\beta = -0{,}4226$ f) $\operatorname{tg}\beta = -2{,}9042$

4. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5. Oblicz.

a) $\sin 120^\circ + \sin 60^\circ$ c) $\sin 135^\circ \cdot \sin 150^\circ$ e) $4\cos 150^\circ - 3\operatorname{tg} 135^\circ$

b) $\cos 150^\circ - \cos 30^\circ$ d) $\cos 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$ f) $8\operatorname{tg} 120^\circ + 6\operatorname{tg} 150^\circ$

6. Oblicz.

a) $\dfrac{\sin 120^\circ - \cos 150^\circ}{3\operatorname{tg} 150^\circ}$ b) $\dfrac{\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ}{\sin 120^\circ}$ c) $\dfrac{\cos 135^\circ + \cos 150^\circ}{\sin 120^\circ + \sin 135^\circ}$

Ćwiczenie 3

a) $\sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ \approx 0{,}9659$

b) $\sin 165^\circ = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ \approx 0{,}2588$

c) $\cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ \approx -0{,}6428$

d) $\cos 175^\circ = \cos(180^\circ - 5^\circ) = -\cos 5^\circ \approx -0{,}9962$

e) $\operatorname{tg} 142^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 38^\circ) = -\operatorname{tg} 38^\circ \approx -0{,}7813$

f) $\operatorname{tg} 163^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 17^\circ) = -\operatorname{tg} 17^\circ \approx -0{,}3057$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin 160^\circ + \cos 130^\circ = \sin 20^\circ - \cos 50^\circ \approx 0{,}3420 - 0{,}6428 < 0$

b) $\sin 105^\circ + \cos 145^\circ = \sin 75^\circ - \cos 35^\circ \approx 0{,}9659 - 0{,}8192 > 0$

2. a) $-\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$

3. a) $\beta \approx 110^\circ$ **b)** $\beta \approx 152^\circ$ **c)** $\beta \approx 164^\circ$ **d)** $\beta \approx 115^\circ$ **e)** $\beta \approx 144^\circ$ **f)** $\beta \approx 109^\circ$

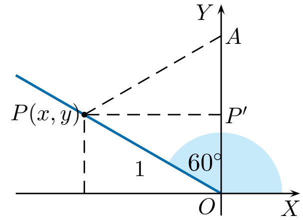
5. a) $\sqrt{3}$ **b)** $-\sqrt{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **e)** $3 - 2\sqrt{3}$ **f)** $-10\sqrt{3}$

6. a) $\dfrac{\sin 60^\circ + \cos 30^\circ}{-3\operatorname{tg} 30^\circ} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}} = -1$

b) $\dfrac{-\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3}$

c) $\dfrac{-\cos 45^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ + \sin 45^\circ} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

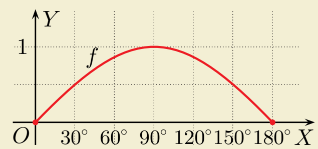
7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> **Przykład**
>
> Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150°.
>
> Zauważmy, że $150^\circ = 90^\circ + 60^\circ$.
>
> Rozpatrzmy trójkąt równoboczny POA (rysunek obok) o boku długości 1, wówczas:
>
> $$|OP'| = \frac{1}{2}, \quad |PP'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
>
> 
>
>
> Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 150° ma współrzędne $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
>
> a stąd:
>
> $$\sin 150^\circ = \frac{y}{|OP|} = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = \frac{x}{|OP|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 150^\circ = \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Uzasadnij, że punkt $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ należy do ramienia końcowego kąta 135° i oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

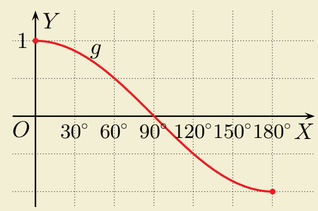
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f, która kątowi $x \in \langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$ przyporządkowuje sinus tego kąta: $f(x) = \sin x$. Zauważ, że dla dowolnego x zachodzi równość:

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x$$



Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji g, która kątowi $x \in \langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$ przyporządkowuje cosinus tego kąta: $g(x) = \cos x$. Zauważ, że dla dowolnego x zachodzi równość:

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$$



POWTÓRZENIE

1. Jaki kąt należy wpisać w miejsce $\boxed{?}$, aby, korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (s. 260), można było podać przybliżoną wartość funkcji? Podaj tę wartość.

a) $\sin 111^\circ = \sin(180^\circ - \boxed{?})$

b) $\sin 132^\circ = \sin(180^\circ - \boxed{?})$

c) $\cos 123^\circ = -\cos(180^\circ - \boxed{?})$

d) $\cos 107^\circ = -\cos(180^\circ - \boxed{?})$

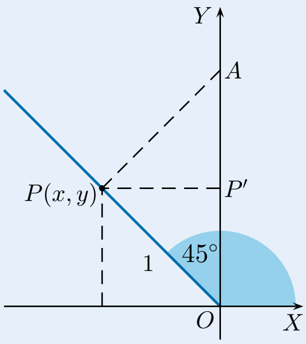
2. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 160^\circ$, b) $\sin 95^\circ$, c) $\cos 100^\circ$, d) $\cos 147^\circ$, e) $\operatorname{tg} 102^\circ$.

7. Zauważmy, że:

$$135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$$

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny równoramienny POA o bokach długości: $1,\ 1,\ \sqrt{2}$.



$|OP'| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|PP'| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 135° ma współrzędne: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

a stąd:

$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\operatorname{tg} 135^\circ = -1$

Powtórzenie

1. a) $\sin 69^\circ \approx 0{,}9336$

b) $\sin 48^\circ \approx 0{,}7431$

c) $\cos 123^\circ = -\cos(180^\circ - 123^\circ) = -\cos 57^\circ \approx -0{,}5446$

d) $\cos 107^\circ = -\cos(180^\circ - 107^\circ) = -\cos 73^\circ \approx -0{,}2924$

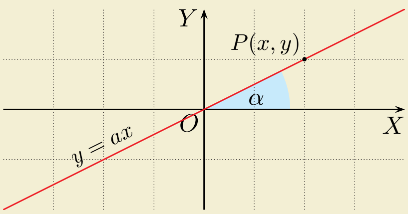
2. a) $0{,}3420$ **b)** $0{,}9962$ **c)** $-0{,}1736$ **d)** $-0{,}8387$ **e)** $-4{,}7046$

5.7. Zagadnienia uzupełniające

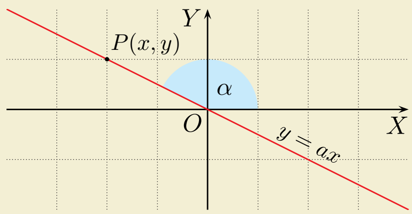
Współczynnik kierunkowy prostej

Rozpatrzmy prostą $y = ax$, gdzie $a \neq 0$.

$a > 0$



$a < 0$

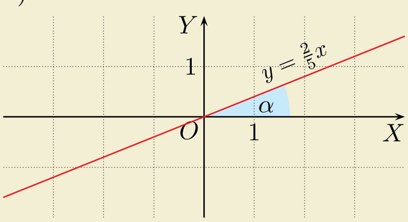


Niech punkt $P(x, y)$ należy do prostej $y = ax$ i leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych. Wówczas zgodnie z definicją funkcji tangens: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, czyli $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$. Wynika stąd poniższe twierdzenie.

Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax$ jest równy tangensowi kąta α, jaki ta prosta tworzy z osią OX: $a = \operatorname{tg} \alpha$.

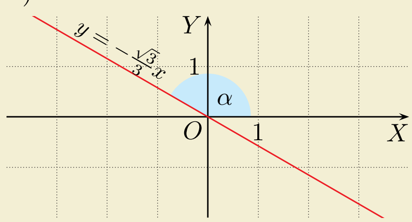
Przykład

a)



Prosta $y = \frac{2}{5}x$ tworzy z osią OX kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$, zatem $\alpha \approx 22°$.

b)



Prosta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ tworzy z osią OX kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, zatem $\alpha = 150°$.

1. Wyznacz miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX.

a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ b) $y = \sqrt{3}x$ c) $y = -\sqrt{3}x$ d) $y + x = 0$

2. Wyznacz przybliżoną miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX.

a) $y = 19x$ b) $y = -\frac{2}{5}x$ c) $10y - 3x = 0$ d) $10y + x = 0$

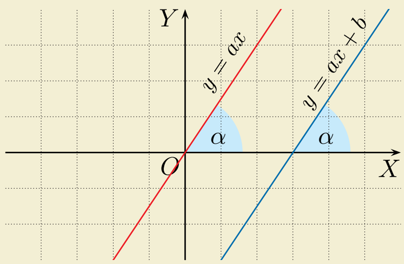
Odpowiedzi do zadań

1. a) $30°$ **b)** $60°$ **c)** $120°$ **d)** $135°$

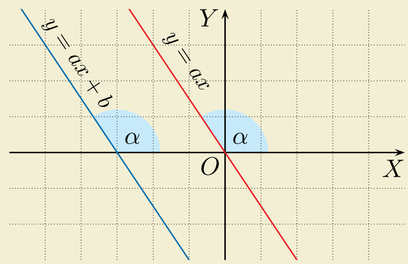
2. a) $87°$ **b)** $158°12'$ **c)** $16°42'$ **d)** $174°17'$

Zauważ, że dla dowolnego współczynnika b prosta $y = ax + b$ tworzy z osią OX taki sam kąt jak prosta $y = ax$.

$a > 0$



$a < 0$



Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$ jest równy tangesowi kąta α, jaki ta prosta tworzy z osią OX: $a = \operatorname{tg}\alpha$.

3. Wyznacz przybliżoną miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX.

a) $y = \frac{3}{5}x - 6$ b) $y - 4x + 8 = 0$ c) $2y + 6x + \frac{1}{4} = 0$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przykład

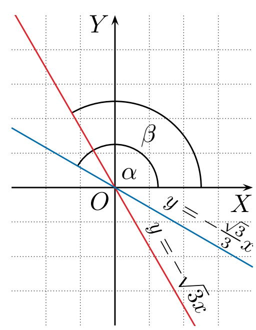
Wyznacz miarę kąta między prostymi $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ i $y = -\sqrt{3}x$.

Prosta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ tworzy z osią OX kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 150°$.

Prosta $y = -\sqrt{3}x$ tworzy z osią OX kąt β taki, że $\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$, czyli $\beta = 120°$.

Kąt między tymi prostymi jest więc równy:

$$\alpha - \beta = 150° - 120° = 30°$$



Wyznacz miarę kąta między prostymi:

a) $y = -\sqrt{3}x$ i $y = x$, b) $y = 2x + 1$ i $y = -4x + 1$.

5. Wyznacz miary kątów trójkąta ograniczonego prostymi o równaniach:

a) $y = x + 4$, $y = \sqrt{3}x - 1$, $y = -2$,

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$, $y = \sqrt{3}x + 3$, $x = 6$.

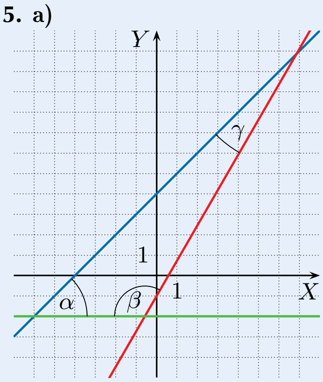
6. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkt $(0, 3)$ i tworzących z osią OX kąt: a) $30°$, b) $60°$, c) $120°$.

3. a) $30°58'$
b) $75°58'$
c) $108°26'$

4. a) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, czyli $\alpha = 120°$
$\operatorname{tg}\beta = 1$, czyli $\beta = 45°$
Zatem $\alpha - \beta = 75°$.

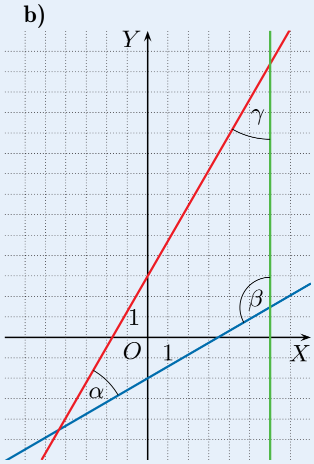
b) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, czyli $\alpha \approx 63°26'$
$\operatorname{tg}\beta = -4$, czyli $\beta \approx 180° - 75°58' = 104°2'$
Zatem $\beta - \alpha \approx 104°2' - 63°26' = 40°36'$.

5. a)



$\operatorname{tg}\alpha = 1$, czyli $\alpha = 45°$
$\operatorname{tg}(180° - \beta) = \sqrt{3}$, czyli
$180° - \beta = 60°$, $\beta = 120°$
$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 15°$

b)



$\operatorname{tg}(\beta - 90°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli
$\beta - 90° = 30°$, $\beta = 120°$
$\operatorname{tg}(90° - \gamma) = \sqrt{3}$, czyli
$90° - \gamma = 60°$, $\gamma = 30°$
$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 30°$

6. a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$ **b)** $y = \sqrt{3}x + 3$ **c)** $y = -\sqrt{3}x + 3$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Uzasadnij, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego kąta ostrego α.

a) $\sin\alpha < 1$ b) $\cos\alpha < 1$ c) $\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha$

2. Wyznacz kąt ostry α, dla którego spełnione jest równanie.

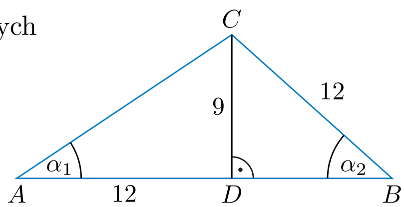
a) $4 - 2\sin\alpha = 3$ c) $2\sqrt{6}\sin\alpha = 3\sqrt{2}$

b) $3 - \sqrt{2}\cos\alpha = 2$ d) $\sqrt{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.

a) $a = 2$, $b = 4$ b) $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α_1 i α_2 w trójkącie ABC (rysunek obok).



5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC.

a) $A(-2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,8)$ c) $A(-6,-1)$, $B(6,4)$, $C(6,-1)$

b) $A(-2,-2)$, $B(8,-2)$, $C(-2,4)$ d) $A(-1,-5)$, $B(4,5)$, $C(-1,5)$

6. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że:

a) $\cos\alpha = \frac{5}{6}$, c) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, e) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, g) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$,

b) $\sin\alpha = 0{,}9$, d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, f) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{6}$, h) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

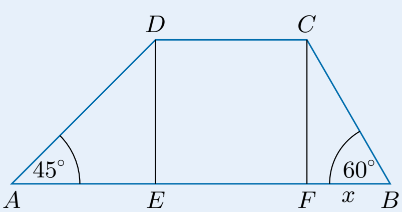
7. Dany jest trapez prostokątny o dłuższej podstawie a, krótszej podstawie b i wysokości h. Oblicz miary kątów, jakie przekątne tego trapezu tworzą z jego podstawami.

a) $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm b) $a = 10$ cm, $b = 6$ cm, $h = 4$ cm

8. Dany jest trapez prostokątny o wysokości równej 6, krótszej podstawie równej 4 i kącie ostrym α takim, że $\cos\alpha = 0{,}8$. Oblicz obwód tego trapezu.

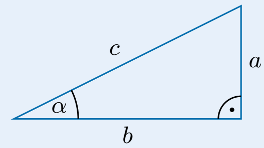
9. Podstawy trapezu mają długości 10 i 4, a jego ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60°. Oblicz obwód tego trapezu.

9. $|CD| = 4$, $|AB| = 10$
Niech $|FB| = x$. Wtedy:
$|BC| = 2x$, $|FC| = x\sqrt{3}$
$|AE| = |DE| = |FC| = x\sqrt{3}$
$|AD| = |AE| \cdot \sqrt{2} = x\sqrt{6}$
$|AE| + |EF| + |FB| = |AB|$,
czyli $x\sqrt{3} + 4 + x = 10$. Stąd $x = 3(\sqrt{3} - 1)$.
Zatem $Ob = 10 + 6(\sqrt{3} - 1) + 4 + 3\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1) = 8 + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}$.



Odpowiedzi do zadań

1. $a < c$ oraz $b < c$



a) $\sin\alpha = \frac{a}{c} < \frac{c}{c} = 1$
b) $\cos\alpha = \frac{b}{c} < \frac{c}{c} = 1$
c) $\sin\alpha = \frac{a}{c} < \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$

2. **a)** $\alpha = 30°$ **b)** $\alpha = 45°$
c) $\alpha = 60°$ **d)** $\alpha = 30°$

3. **a)** $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{2}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$

4. $\sin\alpha_1 = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha_1 = \frac{4}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha_2 = \frac{3}{4}$,
$\cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

5. **a)** $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{3\sqrt{34}}{34}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{5\sqrt{34}}{34}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{3}$
c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$
d) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$

6. **a)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$
b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}$
c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$
d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$
f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{34}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{17}$
g) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$
h) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$

7. **a)** $\alpha \approx 68°54'$, $\beta \approx 52°24'$
b) $\alpha \approx 33°42'$, $\beta \approx 21°48'$

8. 32

Zestaw II

1. Uzasadnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ spełniony jest warunek:

a) $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$, b) $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

2. Uzasadnij, że nie istnieje kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ spełniający równanie:

a) $5 - \frac{2}{3}\sin\alpha = 3$, c) $\sqrt{5}\sin\alpha = 5 - \sqrt{5}$,

b) $\frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cos\alpha$, d) $3\cos\alpha + 6 = \sqrt{3}$.

3. Oblicz.

a) $\sin 30^\circ(\cos 0^\circ - 2\cos 135^\circ)$ e) $\cos 135^\circ \cdot \sin 90^\circ - \sin 135^\circ \cdot \cos 90^\circ$

b) $(\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$ f) $\sin 15^\circ \cdot (\operatorname{tg} 135^\circ + 1)$

c) $\frac{\sin 150^\circ - 2\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ}$ g) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 150^\circ}$

d) $\frac{\sin 45^\circ + \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ}$ h) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ}{\sin 60^\circ}$

4. Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje wartość 1.

a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$ c) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ$

b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ$ d) $\sin^2 26^\circ + \sin 64^\circ \cdot \cos 26^\circ$

Wskazówka. Skorzystaj z zależności $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

5. Narysuj w układzie współrzędnych kąt α, do którego ramienia końcowego należy punkt P. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P(1, 4)$ b) $P(-1, 4)$ c) $P(-3, 2)$ d) $P(-2, 3)$

6. Współrzędne punktu $P(x, y)$, który leży na ramieniu końcowym kąta α, spełniają podane niżej warunki. Wyznacz współrzędne punktu P oraz oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

a) $x = -2$, $y = 3 - x$ c) $x = y + 3$, $y = -x + 6$

b) $x = \frac{1}{3}y$, $y = x + 4$ d) $x^2 + 9 = 6x$, $4y^2 - 4y + 1 = 0$

7. Dany jest trójkąt o kątach: α, β i γ. Korzystając z tablic, oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta γ.

a) $\alpha = 17^\circ$, $\beta = 30^\circ$ b) $\alpha = 28^\circ$, $\beta = 45^\circ$

8. Kąty α i β spełniają warunki: $\alpha < \beta$ i $\alpha + \beta = 180^\circ$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta β, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, b) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$.

1. Niech $P(x, y)$ – punkt leżący na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) $y \geqslant 0$, czyli $\sin\alpha = \frac{y}{r} \geqslant 0$

$y = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = r$, czyli $\sin\alpha = \frac{y}{r} \leqslant \frac{r}{r} = 1$.

Zatem $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$.

b) $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = r$, więc $\frac{|x|}{r} \leqslant 1$, czyli $|\cos\alpha| \leqslant 1$.

Zatem $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

2. a) $5 - \frac{2}{3}\sin\alpha = 3$, czyli $\sin\alpha = 3 > 1$, zatem taki kąt α nie istnieje.

b) $\frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cos\alpha$, czyli $\cos\alpha = \frac{3}{2} > 1$, zatem taki kąt α nie istnieje.

c) $\sqrt{5}\sin\alpha = 5 - \sqrt{5}$, czyli $\sin\alpha = \sqrt{5} - 1 > 1$, zatem taki kąt α nie istnieje.

d) $3\cos\alpha + 6 = \sqrt{3}$, czyli $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 < -1$, zatem taki kąt α nie istnieje.

3. a) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ **b)** 0 **c)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** 0

g) $3 - \sqrt{3}$ **h)** $-\frac{8}{3}$

4. a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ = \sin^2(90^\circ - 53^\circ) + \sin^2 53^\circ = \cos^2 53^\circ + \sin^2 53^\circ = 1$

c) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ = \sin 20^\circ \cdot \cos(90^\circ - 20^\circ) + \cos^2 20^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$

5. a) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = 4$

b) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -4$

c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$

d) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$

6. a) $P(-2, 5)$, $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{2}$

b) $P(2, 6)$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$

c) $P(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

d) $P(3, \frac{1}{2})$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{37}}{37}$, $\cos\alpha = \frac{6\sqrt{37}}{37}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6}$

7. a) $\sin\gamma \approx 0{,}7314$, $\cos\gamma \approx -0{,}6820$, $\operatorname{tg}\gamma \approx -1{,}0724$

b) $\sin\gamma \approx 0{,}9563$, $\cos\gamma \approx -0{,}2924$, $\operatorname{tg}\gamma \approx -3{,}2709$

8. a) $\sin\beta = \frac{1}{4}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

b) $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{5}{12}$

c) $\sin\beta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos\beta = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{2}{5}$

Przed obowiązkową maturą z matematyki

Test

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{1}{5}$. Wynika stąd, że:

A. $\cos\alpha = \frac{1}{5}$,

B. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$,

C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{5}$,

D. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

2. Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to:

A. $\alpha \in (0°; 30°)$,

B. $\alpha \in (30°; 45°)$,

C. $\alpha \in (45°; 60°)$,

D. $\alpha \in (60°; 90°)$.

3. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 50 cm, a sinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{24}{25}$. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 112 cm, B. 108 cm, C. 100 cm, D. 98 cm.

4. Jeśli kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, to wyrażenie $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równe:

A. $\frac{1}{3}$, B. 1, C. $\frac{3}{10}$, D. 3.

5. Istnieje kąt ostry α taki, że:

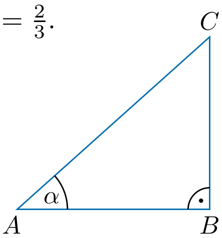
A. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{2}$,

B. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

C. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{2}{3}$,

D. $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

6. Dany jest trójkąt prostokątny (rysunek obok), w którym $|BC| = 6$ oraz $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Wówczas:



A. $|AC| = 6$,

B. $|AC| = 3\sqrt{5}$,

C. $|AC| = 5\sqrt{3}$,

D. $|AC| = 9$.

7. Wartość wyrażenia $\cos\alpha + \cos(90° - \alpha)$ dla $\alpha = 60°$ jest równa:

A. $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$, B. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$, C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, D. $\frac{1}{2}$.

8. Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

A. $\sin 61° + \cos 151°$

B. $\sin 151° - \cos 61°$

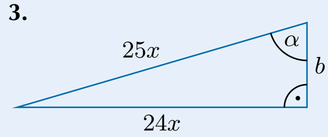
C. $\sin 151° \cdot \cos 61°$

D. $\sin 151° : \cos 61°$

9. Wartość wyrażenia $(\sin 150° + \operatorname{tg} 135°) \cdot \frac{\operatorname{tg} 120°}{\cos 150°}$ jest liczbą przeciwną do liczby:

A. -1, B. 1, C. $\sqrt{3}$, D. $-\sqrt{3}$.

3.



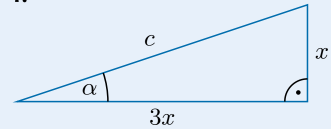
$b = \sqrt{(25x)^2 - (24x)^2} =$
$= 7x$

$25x = 50$

$x = 2$

$Ob = 56x = 112$ [cm]

4.



$c = \sqrt{(3x)^2 + x^2} = \sqrt{10}x$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$,

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{3}{10}$

5. A. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$
$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

B. $\alpha = 60°$ i $\alpha = 30°$, czyli sprzeczność

C. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$
$= \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$

D. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$
$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

7. $\cos 60° + \cos 30° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

A. $\frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

8. A. $\sin(90° - 29°) + \cos(180° - 29°) = \cos 29° - \cos 29° = 0$

B. $\sin(180° - 29°) - \cos(90° - 29°) = \sin 29° - \sin 29° = 0$

C. $\sin(180° - 29°) \cdot \cos(90° - 29°) = \sin 29° \cdot \sin 29° = \sin^2 29° \neq 1$

D. $\sin(180° - 29°) : \cos(90° - 29°) = \sin 29° : \sin 29° = 1$

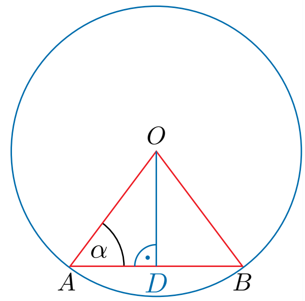
9. $(\sin 150° + \operatorname{tg} 135°) \cdot \frac{\operatorname{tg} 120°}{\cos 150°} = (\sin 30° - \operatorname{tg} 45°) \cdot \frac{-\operatorname{tg} 60°}{-\cos 30°} = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -1$

$-(-1) = 1$

Zadania z krótką odpowiedzią

Zadanie 1 (2 pkt)
Oblicz cosinus kąta ostrego, jeśli kwadrat odwrotności sinusa tego kąta jest równy 5.

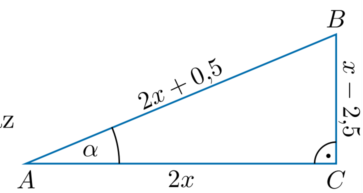
Zadanie 2 (2 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$ oraz kątach ostrych α i β. Oblicz $\sin\alpha \cdot \sin\beta$.



Zadanie 3 (2 pkt)
Dany jest okrąg o środku O i promieniu 6 (rysunek obok). Oblicz długość cięciwy AB, jeśli $\sin\alpha = 0{,}8$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Uzasadnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ\rangle$ prawdziwa jest równość $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$.

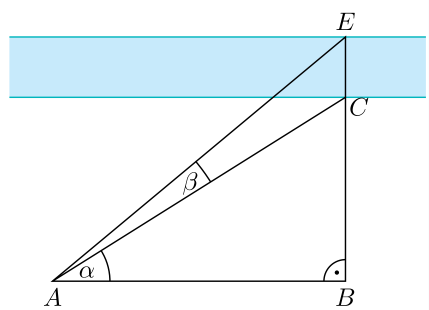
Zadania z rozszerzoną odpowiedzią



Zadanie 5 (4 pkt)
Oblicz obwód trójkąta ABC (rysunek obok) oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

Zadanie 6 (4 pkt)
Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych α i β są kolejnymi liczbami parzystymi. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha + \sin\beta)^2$.

Zadanie 7 (4 pkt)
Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i $(7 + 3\sqrt{3})$ cm oraz wysokości 3 cm. Jego kąty ostre przylegają do dłuższej podstawy, a jeden z nich ma miarę równą 45°. Oblicz iloczyn cosinusów kątów rozwartych tego trapezu.



Zadanie 8 (4 pkt)
W celu obliczenia szerokości rzeki (długość odcinka CE na rysunku obok) dokonano pomiarów w terenie: $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 8^\circ$, $|AC| = 120$ m. Oblicz szerokość rzeki z dokładnością do 1 m.

1. $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 5$, czyli $\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$
$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha =$
$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

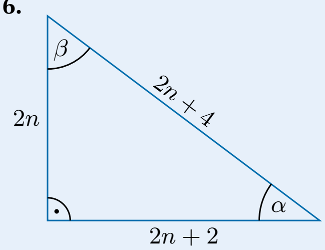
2. $\frac{2}{5}$

3. $\sin\alpha = \frac{|OD|}{|AO|}$, czyli
$|OD| = 0{,}8 \cdot 6 = 4{,}8$
$|AD| = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = 3{,}6$
$|AB| = 2|AD| = 7{,}2$

4. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$
$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$

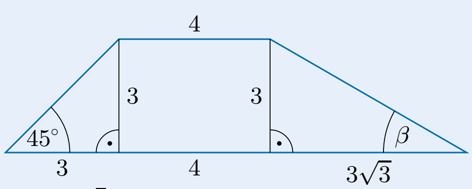
5. $(2x + 0{,}5)^2 = (x - 2{,}5)^2 + (2x)^2$ i $x > 2{,}5$
$x^2 - 7x + 6 = 0$ i $x > 2{,}5$, czyli $x = 6$
$Ob = 5x - 2 = 28$,
$\sin\alpha = \frac{3{,}5}{12{,}5} = \frac{7}{25}$,
$\cos\alpha = \frac{12}{12{,}5} = \frac{24}{25}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3{,}5}{12} = \frac{7}{24}$

6.



$(2n)^2 + (2n + 2)^2 =$
$= (2n + 4)^2$, gdzie $n > 0$
Stąd $n = 3$ oraz długości boków trójkąta: 6, 8, 10
$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 =$
$= \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$

7.



$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, zatem $\beta = 30^\circ$
$\cos(180^\circ - 45^\circ) \cdot \cos(180^\circ - 30^\circ) =$
$= -\cos 45^\circ \cdot (-\cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

8. $\frac{|BC|}{120} = \sin 32^\circ$, czyli $|BC| = 120 \cdot \sin 32^\circ$
$\frac{|AB|}{120} = \cos 32^\circ$, czyli $|AB| = 120 \cdot \cos 32^\circ$
$\frac{|BE|}{|AB|} = \operatorname{tg} 40^\circ$, czyli $|BE| = 120 \cdot \cos 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$
$|CE| = |BE| - |BC| = 120 \cdot (\cos 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ - \sin 32^\circ) \approx$
$\approx 120 \cdot (0{,}848 \cdot 0{,}8391 - 0{,}5299) \approx 22$ [m]